Journal of Applied And Basic Machine Intelligence Research (ABMIR)

پژوهش‌های نظری و کاربردی هوش ماشینی

سال اول، شماره دوم، پاییز و زمستان ۱۴۰۲، صفحات ۹۱-۸۱

روش جدید پیاده‌سازی قضایای هندسی

داریوش لطیفی [۱]، ابوالفضل فتح اله زاده [۲]*

[۱] گروه ریاضیات و کاربردها، دانشکده علوم، دانشگاه محقق اردبیلی، اردبیل، ایران

[۲] دانشگاه سانترال سوپلک، متز، فرانسه

مقاله پژوهشی

چکیده

هدف این مقاله پیاده‌سازی دو قسمت اول از سه قسمت عمده (۱) منطق فازی، (۲) استدلال جبری و منطقی یکپارچه و (۳) یادگیری اتوماتیک عبارات فضائی است. پس از بحث در خصوص لزوم استفاده از عبارات فازی در هندسه فضائی به چگونگی ادغام مختصات کمی و کیفی مرتبط با اشکال هندسی در موتور سیستم ارزیابی عبارات فضائی و اثبات قضایا، به‌نام Geomkr، می‌پردازیم. استدلال یک پارچه به‌معنی ادغام استدلال منطقی و جبری برای رضایت‌مندی عبارات توصیف صحنه یا قضایای هندسی است. بعد از توصیف نحوه ارزیابی عبارت فضایی به معرفی الگوریتم پیاده سازی می‌پردازیم. در خاتمه پس از نتیجه‌گیری به طرح مسائل جدید اشاره می‌کنیم.

تاریخ دریافت:

۱۴۰۲/۰۲/۰۶

تاریخ پذیرش:

۱۴۰۲/۰۶/۱۸

کلیدواژه‌ها:

منطق فازی، ارزیابی عبارت هندسی، عبارات فازی هندسی، استدلال یکپارچه جبری و منطقی

نویسنده‌مسئول:

latifi@uma.ac.ir

doi: 10.22034/ABMIR.2023.20024.1031

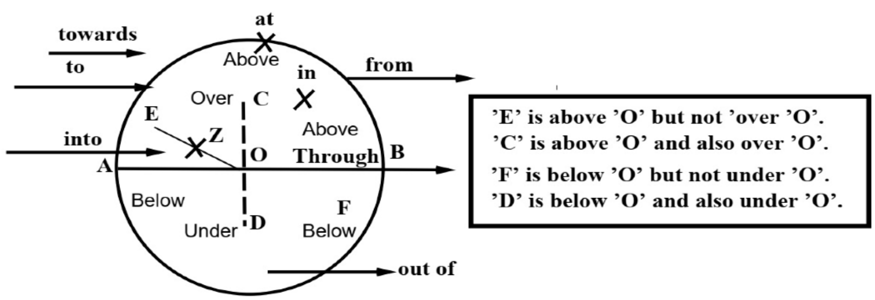
۱- مقدمه

استفاده از مختصات نقاط برای اثبات قضایای هندسی ([۳، ۲،۱]) لازم ولی کافی نیست، به‌دلیل اینکه استناد به توصیف فضایی اشکال هندسی با مختصات دقیق به ندرت اتفاق می افتد. گاهی اوقات، حتی تعیین مختصات بعضی از نقاط در سیستم دو بعدی، به‌دلیل فقدان اطلاعات، امکان پذیر نیست. در این مواقع، معلومات سمبلیک می‌تواند جایگزین باشد [٤]:

- در پردازش تصویر برای توصیف رابطه یک نقطه P و یکشی سه بعدی O می‌توان از خط PQ استفاده کرد که در آن Q نقطه ایده آل فضای تصویری است [٥].
- اگر بخواهیم بدانیم آیا یکشی از سوراخی عبور می‌کند کافی است که حجم آنشی و سوراخ را بدانیم و در سیستم توصیف کاربردی روابط بین آنها را تعریف کنیم [٧،٦].
- در پردازش زبان طبیعی برای تعیین معانی جملات زیرین: (۱) شیر در یخچال است، (۲) شیر (آب) باز است، (۳) شیر در قفس است. علاوه‌بر اینکه باید عضویت شیر به کلاس مایع، جامد، حیوانات و ... در سیستم هوشمند تعریف شود، باید رابطه‌های گوناگون شیر از جمله روابط حجمی را با اشیا مختلف در نظر گرفت [٨].

برای پیاده سازی مؤثر سیستم استدلال عبارت فضایی [١٠،٩] باید روابط بین داده‌ها و انواع استنتاج از جمله استقرایی، به‌وسیله «بازنمایی دانش»[1] مدل سازی شود.

باقی این نوشتار به نحو زیر است: بخش دوم به طراحی کلیات مختصات و اطلاعات فازی می‌پردازد. در بخش سوم به نحوه ادغام ادله‌های جبری و منطقی پرداخته می‌شود. اثبات عبارت‌های هندسه فضائی در بخش چهارم توصیف شده است. بخش پنجم به پیاده‌سازی اختصاص داده شده است. در بخش ششم پس از نتیجه‌گیری به طرح مسائل جدید اشاره می‌شود.



شکل ۱: Points and approximate references

۲- مختصات و اطلاعات فازی

اگر در عبارتی حداقل یک گزاره کمی مانند بالا (above)، پائین (below)، بالای عمودی (over) یا پائین عمودی (under) استفاده شود، آنگاه آن را عبارت فازی می‌خوانیم [٧].

شکل ۱ معانی این گزاره‌ها را نشان می‌دهد. برای تعریف جبری و منطقی این گزاره‌ها، ابتدا به توصیف جبری $F_1=\{above,\ below\}$ می‌پردازیم. سپس با استفاده از اطلاعات F_1 در KR و گزاره‌هایی که بعداً اضافه می‌کنیم به تعریف $F_2=\{over,\ under\}$ در سیستم جبری خواهیم پرداخت. برای تعریف F_1 در سیستم جبری با کمک گرفتن از جهان سخن[2] [١١] مفاهیم فازی $U=\{u_1,u_2,...,u_n\}$ و زیرمجموعه فازی μ را تعریف می‌کنیم: اگر در نمودار گرافیکی $\mu:U\to[0,1]$ یک نقطه‌ای باشد که جهت نمایش یکنواخت را تغییر دهد، آنگاه تابع در نقطه از نوع $\prod-type$ است. تعاریف زیر رابطه above و below با $\prod-type$ را بهتر توصیف می‌کند:

[1] Knowledge Representation (KR)
[2] Universe of discourse

$$\mu_{above_x}(U_i)=\begin{cases}1-\mu_x(U_i) & \text{if} \quad U_i \ge U_{\max} \\ 0 & \text{if} \quad \text{Otherwise}\end{cases}$$

$$\mu_{below_x}(U_i)=\begin{cases}1-\mu_x(U_i) & \text{if} \quad U_i \le U_{\min} \\ 0 & \text{if} \quad \text{Otherwise}\end{cases}$$

در اینجا $U_{\max}(U_{\min})$ حداکثر (حداقل) $\mu_x(U_i)$ است.

شایان‌ذکر است در اکثر کاربردهای علمی، من‌جمله با داده‌های دامنه پیوسته، این داده‌ها به‌صورت ناپیوسته در دسترس است، بنابراین، احتمالاً با کمک پاره‌خط‌ها (line segments) تقسیم‌بندی مناسبی وجود دارد که بتوانیم در «بازنمایی دانش» از آن‌ها استفاده کنیم. درنتیجه تلفیق مطالب بالا با ایده اشراق و ممدانی [۱۲] - تقسیم مجموعه فازی به زیرمجموعه‌های با خاصیت توصیف «آسان‌تر»- امکان‌پذیر است. نمونه کاربردی دیگر: برای تعیین زمان سوراخ کردن مواد فلزی توسط لیزر از روش معرفی‌شده مبتنی بر الحاق – درون‌یابی در پایگاه‌های داده و دانش بهره بردیم [۱۳].

با کمک گرفتن از تعریف F_1 در «بازنمایی دانش» به توصیف F_2 می‌پردازیم. اول گزاره $under(A,B)$ بامعنی نقطه A پائین عمودی نقطه B است را به کمک روابط عمودی $perpen(A,B,C,D)\,(AB \perp CD)$، روی خط $online(P,A,B)$ و زیر (below) تعریف می‌کنیم: جدول ۱ تعریف گزاره under را با به‌کارگیری نقاط و گزاره‌های مرتبط با این نقاط را نشان می‌دهد.

حال در بخش بعدی به تشریح اجمالی استدلال جبری و منطقی مرتبه اول با دامنه کاربرد در هندسه فضائی کلاسیک – بدون گزاره‌های فازی- می‌پردازیم.

۳- استدلال جبری و منطقی

روابط ترتیبی[1] از نظریه ترتیب، شاخه‌ای از ریاضی است که در خصوص مفهوم شهودی ترتیب با استفاده از روابط دوتایی مانند noteq:

$$noteq(A,B) \leftrightarrow x_A \ne x_B \vee y_A \ne y_B$$

استفاده می‌شود.

Table 1: Logical representation of the predicate `under`

under(D,C)	$(\exists A,B)$ below(D,C) $\wedge$ perpen(A,B,C,D)
perpen(A,B,C,D)	$noteq(A,B) \wedge noteq(C,D) \wedge ((\neg noteq(A,C) \wedge rangle(B,A,D)) \vee (noteq(A,C) \wedge online(A,C,D) \wedge rangle(B,A,C)) \vee (noteq(A,C) \wedge \neg online(A,C,D) \wedge online(C,A,B) \wedge rangle(A,C,D)) \vee (noteq(A,C) \wedge \neg online(A,C,D) \wedge \neg rangle(C,A,B) \wedge (\exists O)(online(O,A,B) \wedge online(O,C,D) \wedge online(A,O,C))))$
rangle(A,B,C)	$noteq(A,B) \wedge noteq(B,C)(\exists O)(midpoint(B,A,O) \wedge eqseq(A,C,C,O))$
midpoint(O,A,B)	$noteq(A,B) \wedge collinar(O,A,B)$
eqseg(A,B,C,D)	length(AB) = length(CD)
collinear(O,A,B)	$(\exists L)\, on(A,L) \wedge on(B,L) \wedge on(C,L) \wedge noteq(O,A) \wedge noteq(O,B) \wedge noteq(A,B)$
online(O,A,B)	$noteq(A,B) \wedge collinear(O,A,B)$

توجه داشته باشید که چندین گزاره در جدول ۱ اضافه‌شده تا توصیف اشکال هندسی به مشکل محاسباتی منجر نشود. توجه داریم که یک گزاره چند متغیری را می‌توان با استفاده از عملگرهای منطقی به مجموعه‌ای از گزاره‌های دو متغیر تبدیل کرد [۱۰].

درروش جبری، برای توصیف گزاره‌های بیشتر از دو متغیر، اطلاعات پائین مفید است:

- اطلاعات متریک مانند خط و پاره‌خط؛
- موازی بودن خطوط؛

[1] Order relations

- چندین نقطه روی یک خط بودن[1]؛
- هم‌نهشت[2] یا متناظر بودن نقاط، مانند تقاطع خطوط.

اطلاعات بالا به‌دلیل اینکه تمام قضایای هندسه فضائی کلاسیک را می‌توان با معادلات چندجمله‌ای نمایش داد، مفید است. باوجوداین در استدلال جبری بازنمایی دانش، اجسام هندسی با ساختارهای داخلی پیچیده مانند چندضلعی‌ها مشکل است، زیرا توصیف جبری این ساختارها بر مبنای مختصات نقاط بسیار مسطح و یکنواخت است و از هیچ سازوکار سازمانی و ساختاری کاربردی برخوردار نیست.

روش‌های استدلال جبری قابل‌استفاده، مانند روش‌های وو [۳] و گروبنر [۱] نمی‌توانند هرگونه نابرابری را مدیریت کنند، زیرا محاسبه آن‌ها در دامنه اعداد مختلط بدان معناست که استدلال هندسی با این روش‌ها نمی‌تواند هرگونه مفاهیم هندسی شامل روابط ترتیبی مانند between و زاویه متناظر را اداره کند. از طرف دیگر در استدلال منطقی ساختار هندسی و روابط ترتیبی را می‌شود با فرمول‌های منطقی مدیریت کرد درحالی‌که توانائی ادله پیشرفته در خصوص اطلاعات متریک، موازی بودن، هم‌خطی نقاط و همسانی زوایا نیز لازم است.

با توجه به توضیحات بالا می‌توان نوشت: استدلال جبری و منطقی مکمل هم هستند. به‌بیان‌دیگر، ادغام این دو روش استدلال به این معنی است که محدودیت هرکدام باقابلیت دیگری برطرف می‌شود. در پیاده‌سازی با منطق مرتبه اول[3] با چهار گزاره مقدماتی شروع می‌کنیم:

۱- on(P,L) یعنی نقطه P روی خط L است؛
۲- between(P,A,B) یعنی نقطه P بین نقاط A و B است؛
۳- eqseg(A,B,C,D) یعنی طول پاره‌خط AB با طول پاره‌خط CD برابر است؛
۴- eqang(A,B,C,D,E,F) یعنی $\angle ABC = \angle DEF$

از جدول ۱ پیدا هست که گزاره under برمبنای گزاره‌های با روابط ترتیبی on، eqseg و noteq تنظیم‌شده‌اند. چندین رابطه (شرایط کمکی[4] مانند noteq) در این جدول موجود است تا تعاریف قابل بهره‌برداری در پیاده‌سازی شود، به‌بیان‌دیگر هنگام ارزیابی، با انحطاط محاسباتی[5] مواجه نشویم. روش گروبنر در اثبات قضایا استفاده‌شده است [۱] ولی این روش را نمی‌توان برای ادله قضایای با تعاریف جبری شامل روابط ترتیبی بکار برد [۲]. این امر در تعاریف خواص هندسه فضائی هم صادق است. به‌عنوان‌مثال between و eqang رابطه ترتیبی هستند. پس مسائل قابل توصیف با یکی از این گزاره‌ها را نمی‌شود با روش گروبنر حل کرد. این امر همچنین در خصوص روش وو صادق است [۳].

۴- ارزیابی عبارت فضائی فازی

مجموعه مراجع فضائی $Expr$ را با فرم زیر در نظر می‌گیریم:

$$Expr = \mathrm{Pred}_1 \wedge \mathrm{Pred}_2 \wedge \ldots \wedge \mathrm{Pred}_n$$

در اینجا Pred_i با $1 \le i \le n$ گزاره فضائی است. اگر یکی از این گزاره‌ها فازی باشد آنگاه Expr عبارت فضای فازی است، مانند عبارت زیر:

$$Expr = \underbrace{online(Z,O,E)}_{\mathrm{Pred}_1} \wedge \underbrace{above(Z,O)}_{\mathrm{Pred}_2} \wedge \underbrace{under(D,O)}_{\mathrm{Pred}_3}$$

معنی online(Z,O,E) نقطه Z روی OE است.

از این اطلاعات می‌توان در تعبیر آزمایش‌های مواد لیزری استفاده کرد: پیش از سوراخ کردن ماده‌ای، می‌خواهیم از درستی خواص زیر مطمئن باشیم [۱۳،٦]:

- ‘Z’ بالای ‘O’ و همچنین روی خط Zapata قرار دارد.
- *‘D’* در پایین عمودی *’O’* قرار دارد.

خط Zapata اسم استعاری L=[O,E] شکل ۱ است. اگر عبارت یک مسئله Expr را به دو زیر عبارت فرض ($Expr_h$) و حکم ($Expr_c$) و به کمک $Expr = Expr_h \wedge (\neg Expr_c)$ توصیف کنیم، آنگاه می‌توانیم ارزیابی آن مسئله را با کمک خواص پایین انجام دهیم:

[1] Collinearity
[2] Congruence
[3] Predicate calculus

[4] Subsidiary conditions
[5] Degenerated case

(1) : $Axioms \cup Expr_c \vdash Expr_c$
(2) : $Axioms \models Expr_h \rightarrow Expr_c$
(3) : $Expr_h \rightarrow Expr_c$
(4) : $\neg(Expr_h \rightarrow Expr_c) \equiv Expr_h \wedge (\neg Expr_c) \equiv Expr$

از فرمول (۱) معادل با (۲) می‌توان یک مدل منطقی برای ارزیابی (۳) استفاده کرد: در برهان خلف (۴) را می‌توان با نفی درستی Expr ارزیابی کرد. می‌دانیم هر مدل منطقی غیرقابل انعطاف[1] است و تمام توصیف ممکن ایزومورفیک هستند، پس کافی است نشان دهیم ارزیابی یکی از این فرمها با استفاده از Axioms نمی‌تواند نتیجه مثبت داشته باشد. اطلاعات بیشتر در خصوص استدلال یکپارچه روش‌های یکپارچه جبری و منطقی و همچنین محدودیت روش به‌کاررفته در [۲] موجود است.

۴-۱ ارزیابی عبارات فضائی

علاوه بر روابط فازی ذکرشده در این کار، نه گزاره زیر با پارامترهای نقطه‌ای را در نظر می‌گیریم:

eqseg eqang collinear
online midpoint para
rangle perpen line

گزاره line با گزاره‌های collinear و online پیوند استنتاجی[2] دارد. از دومی در توصیف فرض یک مسئله استفاده نمی‌کنیم، ولی اولی در تعریف حکم بکار برده می‌شود. از چهار گزاره on، between، eqseg و eqang برای توصیف Expr بجای between از line استفاده می‌شود. از گزاره on استفاده نمی‌کنیم برای اینکه اطلاعات مفیدی با توصیف on(A,L) یا $on(A,L) \wedge on(B,L)$ به ما نمی‌دهد. برای اشاره به امر قرار داشتن بیش از سه نقطه روی یک خط با

$on(A,L) \wedge on(B,L) \wedge on(C,L) \wedge \ldots$

می‌توانیم از گزاره collinear استفاده کنیم. اضافه شود که از گزاره on(A,L) (نقطه A درروی خط L است) فقط در داخل «موتور-جزئی از برنامه پیاده‌سازی-» استفاده می‌کنیم.

برای سهولت ارزیابی، بعضی‌اوقات مفید است گزاره‌های در «سطح بالا»[3] تعریف نماییم. همان‌طوری‌که در [۱،۲] اشاره‌شده است، این تعاریف باید بسیار دقیق باشند در غیراین‌صورت در استفاده از آن‌ها به اشکال برخورد می‌کنیم. جدول ۱، جدول تعاریف شش گزاره «سطح بالا» را نشان می‌دهد. توصیف گزاره غیرمنظم noteq(x,y) (یعنی $x \neq y$) عاریت گرفته‌شده از [۱] است. جدول ۲ توصیف سیستم جبری گزاره که بستگی به هفت گزاره جدول ۱ را دارد، نشان می‌دهد.

Table 2: Algebraic representations of the predicate under

under(D,C)	$(\exists A, B)$ below(D,C) $\wedge$ perpen(A,B,C,D)
below(A,B)	$(\exists \prod -type)(AB \subset \prod -type)\ (U_i \leq U_{min}) \wedge (1-\mu_x(U_i))$
perpen(A,B,C,D)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (x_C \neq x_D \vee y_C \neq y_D) \wedge (x_B - x_A)(x_D - x_C) + (y_B - y_A)(y_D - y_C) = 0$
noteq(A,B)	$x_A \neq x_B \wedge y_A \neq y_B$
eqseg(A,B,C,D)	$(x_B - x_A)^2 - (y_B - y_A)^2 = (x_D - x_C)^2 - (y_D - y_C)^2$
collinear(A,B,C)	$(y_B - x_A)x_C + (x_A - x_B)y_C + (x_B y_A - x_A y_B) = 0$
online(P,A,B)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (y_A - y_P y_B + x_A y_P - x_P y_A) = 0$
midpoint(P,A,B)	$(x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (2x_P - x_A - x_B = 0) \wedge (2y_P - y_A - y_B = 0)$

از بین نه گزاره، eqang و para معادل همدیگر هستند. گاهی از بین نه گزاره فضائی هندسی نیاز به استفاده از گزاره‌های ذکرشده در بالا داریم، مانند

$para(A,B,C,D) \wedge below(F,E)$

با معادل توصیف منطقی

$\neg(\exists P)(online(P,A,B) \wedge online(P,C,D))$.

همان‌طوری‌که در [۲] اشاره‌شده این گزاره غیرمنظم است. اگر در توصیف فرض یک مسئله *para* را بکار بگیریم امکان اینکه بدانیم

[1] Categorical
[2] Subsumes
[3] Higher-level predicates

آیا مثلاً خطوط AB و CD در نقطه‌ای باهم تلاقی می‌کنند یا نه؟ هست. برای دانستن آن، رابطه منظم را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$opara(A,B,C,D) \Leftrightarrow para(A,B,C,D) \wedge$$

$$(\exists P) between(P,A,D) \wedge between(P,B,C)$$

$$para(A,B,C,D) \Leftrightarrow \neg(\exists P) online(P,A,B) \wedge online(P,C,D)$$

وقتی گزاره $between$ در یک عبارت باشد برای برآورد نتیجه ارزیابی آن به‌وسیله استدلال با اعداد انجام می‌گیرد. برای این‌کار اول این رابطه را به رابطه غیرمنظم تغییر می‌دهیم:

$$between(P,A,B) \equiv (\exists L) \wedge on(P,L) \wedge on(A,L) \wedge on(B,L) \wedge (A \neq B) \wedge (A \neq P) \wedge (B \neq P)$$

از تعریف بالا می‌توان دریافت که قابلیت استدلال $between$ خیلی محدود است. برای رفع این امر با ادغام توصیف جبری گزاره‌ها به سؤال بالا با ارزیابی که به‌صورت زیر تعریف‌شده است می‌توان پاسخ داد:

$$para(A,B,C,D) \Leftrightarrow (x_A \neq x_B \vee y_A \neq y_B) \wedge (x_C \neq x_D \vee y_C \neq y_D) \wedge (y_B - y_A)x_C + (x_A - x_B)y_C + (x_B y_A - x_A y_B) \neq 0 \wedge (x_B - x_A)(y_D - y_C) - (x_D - x_C)(y_B - y_A) = 0$$

نحوه ارزیابی به دو روش است: استدلال با داده و استدلال باهدف. اولی داده محور است: سعی بر این است که با اطلاعات و داده‌های پایگاه دانش به‌درستی یا غلط بودن هدف کاربر حکم ($Expr_c$) یا فرض ($Expr_h$) پی‌ببریم. درحالی‌که دومی هدف محور است: با تقسیم هدف به زیر هدف‌ها راست آزمایی اجزای مرتبط با پایگاه دانش باید بررسی شود.

در تبدیل عبارت منطقی به عبارت جبری که بر اساس جداول ۱ و ۲ است توجه داشته باشید که این قوانین تبدیل سخت‌گیرانه هستند به این معنا که شرایط کمکی مناسب برای حذف تنظیمات هندسی منحط پیوست شده است. با تعریف صحیح سیستم مختصات می‌توانیم تعداد متغیرها در توصیف جبری را کاهش دهیم، درنتیجه باعث می‌شود محاسبه با روش گروبنر کارآمد باشد. در سیستم، نقطه‌ای که روی بیشترین خطوط موجود است را در نظر می‌گیریم، سپس بین این خطوط بیشترین تعداد نقاط روی محور x را انتخاب می‌کنیم [۲].

۲-٤ پایگاه دانش

اجزای مهم بازنمایی دانش شامل ۱- پایگاه دانش[1] و ۲- سیستم یادگیری است [۱۰]. پایگاه دانش برای ذخیره‌سازی از داده‌های پیچیده ساختاریافته و بدون ساختار استفاده می‌کند.

سیستم مبتنی بر پایگاه دانش از دو زیرسیستم تشکیل‌شده است: ۱- پایگاه دانش، که نشان‌دهنده واقعیت‌هایی در مورد جهان می‌باشد و ۲- یک ماشین استنتاج، که در مورد این واقعیت‌ها استنتاج می‌کند و از قواعد برای استنتاج واقعیت‌های جدید استفاده می‌کند. توجه داشته باشیم که ماشین استنتاج کلاسیک قادر به نتیجه‌گیری مبتنی بر استدلال یکنواخت با استفاده از منطق مرتبه اول است درصورتی‌که ماشین استنتاج مدرن باید مبتنی بر قوانین کلی (قضایا و اصول هندسی)، استثنا و همچنین استثناها بر استثناها باشد:

۱- همه انسان‌ها فانی‌اند.

۲- پرندگان پرواز می‌کنند.

۳- a- اتومبیل‌های سواری معمولی پنج صندلی دارند
b- سواری ورزشی دو صندلی دارد
c- سواری اتومبیل‌رانی یک صندلی دارد.

اولین جمله بالا قابل‌نمایش در یک پایگاه داده نیست، در عوض یک پایگاه داده اطلاعات هزاران جدول را نگهداری می‌کند که اطلاعاتی در مورد انسان خاصی را نمایش می‌دهند. این پایگاه دانش است که می‌تواند از این جمله در مورد انسان خاصی استنتاج کند که او فانی است. خواننده نباید پایگاه دانش را با پایگاه داده اشتباه کند: پایگاه داده، ذخیره داده‌های بزرگ به‌صورت جداول داده‌ای است. از پایگاه دانش برای فهم واقعیت‌ها در مورد جهان استفاده می‌شود. در منطق کلاسیک از دومین جمله بالا نمی‌توان نتیجه گرفت که پنگوئن پرواز نمی‌کند مگر اینکه این اطلاعات را به پایگاه دانش «بدهیم».

منطق کلاسیک نمی‌تواند در خصوص جمله‌های سومین مثال بالا تصمیم‌گیری کند ولی منطق غیرکلاسیک با موتور استدلال استنتاج

[1]Knowledge Base: KB

استقرایی می‌تواند تعداد صندلی (های) فرد خاصی را بسته به شرایط (سواری معمولی، ورزشی، فرمول یک و غیره) را تعیین کند. به‌عبارت‌دیگر استدلال استقرایی باید نتیجه بگیرد که اتومبیل شرکت‌کننده خاصی در مسابقه فرمول یک، یک صندلی دارد.

توجه می‌کنیم که کارایی این موتور با قابلیت یادگیری مرتبط است، مطلبی که بررسی آن موضوع این مقاله نیست. برای نحوه یادگیری و یادگیری استقرائی، خواننده می‌تواند به کار ما در مرجع [٤] مراجعه کند.

٥- الگوریتم

سیستم استدلال کاربردی را Geomkr نام‌گذاری کرده‌ایم و به زبان برنامه‌نویسی C نوشته‌ایم [١٤]. الگوریتم از سه قسمت زیر تشکیل‌شده است:

- $\mathcal{E}$ برای برآورد گزاره (های) عبارت ورودی کاربر Expr و جایگزینی آن‌ها با اعداد 1 (درست) یا 0 (غلط).
- $\mathcal{P}$ برای تبدیل $\mathcal{E}$ به عبارت لهستانی.
- ارزیابی $\mathcal{P}$ به‌کمک اپراتور (های) منطق مرتبه اول موجود در *Expr*.

در ادامه به نحو و صرف ورودی کاربر می‌پردازیم.

٥-١ نحو (syntax) و صرف (semantic) ورودی کاربر Expr

ورودی کاربر ($Expr$) متشکل از یک یا چندین گزاره به همراه عملگر (های) منطق مرتبه اول «و»، «یا» و «نفی» (بجای علامت ¬ از نماد ! استفاده می‌کنیم $\theta=\{\wedge,\vee,!\}$). کاربر سیستم Geomkr می‌تواند برای توصیف عملگر پیامد ($\rightarrow$ *i.e. implication*) در عبارت‌های مانند $p\rightarrow q$ از معادل صرفی آن $p\wedge\neg q$ استفاده کند. تعریف نحو عبارت فضائی Geomkr به‌قرار زیر است:

```
<Expr>          ::=<predicate>[<operator><predicate>]+
<predicate>     ::=<functor>"("<Args>")"
<Args>          ::=<operator>[","<Args>]*
<functor>       ::=<alpha>[<alphanumeric>]*
<operator>      ::="&"|"|"|"!"
<alpha>         ::=[a-zA-Z]
<alphanumeric>  ::=[a-zA-Z0-9]
```

Algorithm 1 : ☞ Main function of **Geomkr**

Input: Expr e.g. $online(Z,O,E)\wedge above(Z,O)\wedge under(D,O)$
Output: 1 or 0 e.g. 1 (see figure 1)

$\mathcal{E}\leftarrow$ Trans $(Expr)$; e.g. $\mathcal{E}=1\wedge 1\wedge 1$
$\mathcal{P}\leftarrow$ Postfix $(\mathcal{E})$; e.g. $\mathcal{P}=111\wedge\wedge$; $4+5*6\rightarrow 456*+$
while $(c\longleftarrow ReadChar\ (\mathcal{P}))$ **do**
  if $c\in\{0,1\}$ **then** Push (c); *push c onto the stack*
  else
    $v\leftarrow(c='!')?$ Unary $(c$,Pop()): Binary $(c$,Pop(),Pop());
    Push(v);
$x\leftarrow$ Pop(); *the final value from the stack. e.g.* $1\ (True)$

Algorithm 2 : ارزیابی گزاره (های) عبارت ورودی

function Trans $(Expr)$;
begin
  $\mathcal{E} \leftarrow \epsilon$ **empty string**
  while ($t \leftarrow$ `ReadToken` (`Expr`)) *read a token* **do**
    if $t \in \Theta$ **then**
      `Conc` $(t, \mathcal{E})$**;** **concatenate** e **to** $\mathcal{E}$
    else
      $h \leftarrow$ `GetFunctor` (t); $v \leftarrow$ `EvalPredicate` (h,t);
      `Conc`$(v, \mathcal{E})$;
  return ($\mathcal{E}$)
function `EvalPredicate` (h,t);
begin
  if h *in Alpha* **then**
    return (`AlphaFuzzy`(t))
  if h *in Beta* **then**
    return(`BetaFuzzy`(t))
  return (`CrispProof`(t)

Algorithm 3 : Postfix

function `Postfix` $(\mathcal{E})$
begin
  $\mathcal{P} \leftarrow \epsilon$ (empty string); stack $\leftarrow \epsilon$
  while $(\mathcal{E} \neq \epsilon)$ **do**
    $c \leftarrow$ `ReadChar`() read the next character in $\mathcal{E}$
    $V \leftarrow (c \in \{0,1\})?\ 1 : (c \in \Theta)?\ 2 : (c =' (')?\ 3;$
    switch *the value of* V **do**
      case 1: `Conc`$(\texttt{c}, \mathcal{P})$**;** *the char is an operand*
      case 2: while $(stack \neq \epsilon)$ **and** *an operator of* $\geqslant$
      priority is on the stack **do**
        `Pop`(); `Conc`(`c`, `θ`);
      `Push`(`c`);
      case 3: `Push`(`c`)
      otherwise
        while *the top of the stack is not a matching* **'('**
        do
          pop the stack and append the operator to $\mathcal{P}$
        pop the stack and discard the returned left
      parenthesis
Pop any remaining items on the stack and append to $\mathcal{P}$

از نحو بالا پیدا است، عبارت $Expr="(“Expr”)"$ جایز نیست.

بجای عبارت مانند $Expr=!(p\wedge q)$ کاربر می‌تواند با استفاده از قانون دمورگان:

$$!(p\wedge q)\equiv !p\vee !q$$
$$!(p\vee q)\equiv !p\wedge !q$$

نیاز خود را توصیف کند. معنی $cube(X)$ با $cube(x)$ در Geomkr متفاوت است: اولی به مکعب خاصی اشاره نمی‌کند درصورتی‌که دومی مرتبط به یک مکعب معینی است. به‌عنوان‌مثال: در عبارت

$$online(Z,O,E)\wedge above(Z,O)\wedge under(D,O)$$

پنج عنصر (گزاره یا عملگر) ($Token$) از سه گزاره و دو عملگر منطق مرتبه اول تشکیل‌شده است. خوانش هر عنصر توسط تابع ReadToken در الگوریتم ۲ انجام می‌گیرد.

توجه شود همان‌طوری‌که در محاسبه عبارت معمولی 4+5*6 ضرب قبل از جمع انجام می‌شود معنی عبارت $P\vee Q\wedge R$ فضایی با $P\vee(Q\wedge R)$ یکی نیست. به‌عبارت‌دیگر باید به تقدم عملگر توجه کرد.

در ارزیابی عبارت‌های شامل عملگر نفی مانند $P\wedge !Q$، اول نتیجه را درصورت امکان (قابل‌محاسبه بودن Q در پایگاه دانش به‌طور مستقیم یا غیرمستقیم: استنتاج ارزیابی با استفاده موجود در آن پایگاه) محاسبه، نتیجه را برآورد و در گزاره دیگری مانند R ذخیره می‌کند بعد به ارزیابی $P\wedge R$ می‌پردازد.

۵-۲ الگوریتم ارزیابی

الگوریتم ۲ محاسبه ارزیابی عبارت کاربر را نشان می‌دهد. برای ارزیابی گزاره (های) عبارت ورودی نیازمند توابع زیر هستیم:

- Alpha برای لیست نام توابع فازی که مستقیماً در سیستم تعریف‌شده‌اند، مانند below و above.
- CrispProof برای تابع ارزیابی درستی گزاره غیرفازی با خروجی (1) یا (0).
- AlphaFuzzy برای ارزیابی تابعی که پارامتر آن با نام گزاره متعلق به لیست Alpha باشد.
- Beta برای لیست نام توابع فازی مانند under و over که ارزیابی آن‌ها توسط تابع BetaFuzzy با کمک AlphaFuzzy و CrispProof امکان‌پذیر است.

در عبارت لهستانی دو شرط برقرار است:

۱- یک عملگر بعد از عملوند[1] نوشته می‌شود.

۲- محاسبه عملیات به ترتیبی که نوشته‌شده‌اند انجام می‌گیرد (از چپ به راست).

مثال: اگر ارزش P و Q به ترتیب درست و غلط باشند آنگاه عبارت لهستانی $Expr=P\wedge !Q$ به خاطر تقدم عملگر نفی عبارت $01\wedge$ است.

مثال دیگر: محاسبه 4+5*6 توسط عبارت لهستانی +*456 انجام می‌گیرد.

جدول زیر نحوه عملکرد محاسبه عبارت لهستانی را نشان می‌دهد:

Input	Stack	
101∧∨	empty	push 1 (first one)
01∧∨	1	push 0
1∧∨	01	push 1 (second one)
∧∨	101	pop 1, pop 0, do 1∧0, push 0
∨	01	pop 0, pop 1, do 0∨1, push 1

۶- نتیجه‌گیری

در این مقاله به تشریح پیاده‌سازی سیستم هوشمند دو قسمت اول از سه مؤلفه یادشده در چکیده این نوشتار برای ارزیابی عبارت فضایی پرداختیم. الگوریتم استدلال این سیستم نه‌تنها از سیستم یکپارچه روش جبری و روش منطقی مرتبه اول استفاده می‌کند بلکه با معرفی گزاره‌های فضایی فازی و نحوه ادغام آن‌ها و همچنین گزاره‌های کلاسیک در این سیستم از توان بالایی نسبت به سیستم‌های کلاسیک برخوردار است.

نتیجه ارزیابی انجام‌شده بر روی تعداد محدودی از اشکال ساده رضایت‌بخش است. بررسی قابلیت‌های تعمیم آن در حال انجام است. موارد زیر ازجمله مسائلی می‌باشند که باید موردمطالعه قرار گیرند:

[1] Operand

- یادگیری روش استدلال استقرائی و پیاده‌سازی مؤثر آن در عبارت فضایی.
- نمایش دانش مراجع تقریبی مانند toward، from و غیره شکل ۱. برای درک معانی شهودی این گزاره‌ها نیاز به تجزیه‌وتحلیل ساختار ساختمانی اشکال که در آن استفاده از این مراجع کاربرد دارند، است.
- توصیف اشکال پیچیده با استفاده از ترکیبات منطقی بین اشکال ساده.
- تدوین مجموعه‌ای از خواص فضائی برای کاربردهای نظیر مهندسی زلزله‌شناسی، طبقه‌بندی خاک و غیره.

References

[1] Kutzler, B. (1988). Algebraic approaches to automated geometry theorem proving. Ph.D. thesis, University of Linz, Austeria.

[2] Matsuyama, T.,& Nitta, T. (1995). Geometric theorem proving by integrated logical and algebraic reasoning. Artificial intelligence, 75(1), 93-113.

[3] Kapur, D., & Mundy, J. L. (1988). Geometric reasoning and artificial intelligence: Introduction to the special volume. Artificial intelligence, 37(1-3), 1-11.

[4] Fatholahzadeh, A., & Latifi., D. (2018) Knowledge representation for the geometrical shapes. Amirkabir university of technology, tehran, ICCG 1st Iranian conference on computational geometry, also in (2018). Journal of mathematics and system science 8(3), 77-83. DOI: 10.17265/2159-5291/2018.03.003.

[5] Mohr, R., & Boufama, B.,& Brand, P. (1995) Understanding positioning from multiple images. Artificial Intelligence, 78(1-2), 213-238.

[6] Fatholahzadeh. A. (2002) Fuzzy modeling of spatial expressions. The IASTED international conference on artificial intelligence and applications (AIA), M.H. Hamza (Ed.), ACTA Press, ISBN 0-88986- 301-6, Anaheim, CA, USA, 277-281.

[7] Fatholahzadeh, A. (1996) reasoning with exact and approximate references in scene description. In: ASME, book VI, energy information management, Vol. I, computer in engineering, George Brown convention center, Houston, Texas Jan. 29 - Feb. 2, 80–88.

[8] Fatholahzadeh, A., (1994)..Conceptualization of sample scene description. Turkish symposium on artificial intelligence and neural networks, C. Bozsahin, U. Halici, K. Oflazer and N. Yalabik (Eds.), Middle East Technical University and Bilkent University, ISBN 975-7679-07-0, Ankara, Turkey (pp. 91-100).

[9] Brahman, R. J., & Leveque. H. J. (1985) Reading in knowledge representation. Morgan Kaufamn Pub.

[10] Fatholahzadeh, A. (1993, 2006). Traitement et Représentation des Connaissances: Méthodes, Algorithmes et Pro- grammes. Volumes, I and II, University of CentraleSupélec, France.

[11] Corcoran, J. (1995) Universe of discourse. Cambridge dictionary of philosophy, Cambridge University Press, p. 941.

[12] Eshragh, F., & Mamdani, E. H. (1981). A general approach to linguistic approximation. in: Mamdani et al. (Eds.), Academic Press, computer and people series (pp. 169–187).

[13] Fatholahzadeh, A. (2003). Wrapping data for querying. The Journal of Scientia Iranica, Sharif University, Iran, 10(4), 454-463.

[14] Kernighan, B., & Richie, D. (1988). C Programming Language. Pearson; 2 edition.

Journal of Applied And Basic Machine Intelligence Research (ABMIR)

Applied and Basic Machine Intelligence Research

Vol. 1, No. 2, Autumn & Winter 2023, pp. 81-91

A new method for implementation of geometric theorems

Dariush Latifi [1], Abolfazl Fatholahzadeh[2*]

Department of Mathematics and Applications, University of Mohaghegh Ardabili, Ardabil, Iran

University of CentraleSupélec, Metz 57070, France

Article Information

Original Research Paper

Received:
2023 April 26

Accepted:
2023 September 9

Keywords:
Fuzzy logic, geometric expression evaluation, geometric fuzzy expressions, integrated algebraic and logical reasoning

Corresponding Author*:
latifi@uma.ac.ir

Abstract

This paper outlines the optimization of the two first parts of the three major components of the scene descriptions of the geometrical shapes, namely (1) fuzzy logic scheme, (2) an integrated algebraic and logical reasoning, and (3) the machine learning technique. After arguing the need for using fuzzy expressions in spatial reasoning, the integration of approximate references into spatial reasoning using absolute measurements is outlined. The integration here means that the satisfiability of a spatial expression including possibly fuzzy one is conducted by both logical and algebraic reasoning. Then, the implementation of spatial expression evaluation is briefly described. The paper ends by the conclusion and the problems to be studied.

doi : 10.22034/ABMIR.2023.20024.1031

E-ISSN: 2821-2037