Journal of Applied And Basic Machine Intelligence Research (ABMIR)

پژوهش‌های نظری و کاربردی هوش ماشینی

سال دوم، شماره اول، بهار و تابستان ۱٤۰۳، صفحات ۱۷۰ - ۱۵۵

حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی با استفاده از روش وو

حامد فراهانی*

استادیار دانشکده علوم دریایی، دانشگاه دریانوردی و علوم دریایی چابهار، چابهار، ایران

مقاله پژوهشی

چکیده

در این مقاله، روشی مبتنی بر الگوریتم وو برای تعیین راه‌حل‌های واقعی دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی معرفی می‌شود. در ابتدا، r- برش‌های یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی محاسبه‌شده و نمایش پارامتری برای این سیستم استخراج می‌گردد. سپس، الگوریتم وو به کار گرفته می‌شود تا نمایش پارامتری دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی را به مجموعه‌ای متناهی از مجموعه‌های مشخصه تبدیل کند. ارتباط قوی‌ای میان راه‌حل‌های این مجموعه‌های مشخصه و راه‌حل‌های دستگاه چندجمله‌ای وجود دارد. الگوریتم وو به‌طور مؤثر دستگاه‌های چندجمله‌ای را با ایجاد مجموعه‌های مشخصه به سیستم‌های مثلثی تبدیل می‌کند، که این امر حل آن‌ها را ساده و کارآمد می‌سازد. این روش نه‌تنها روابط میان متغیرها را روشن می‌کند، بلکه کارایی محاسباتی در حل معادلات چندجمله‌ای را نیز افزایش می‌دهد. مزیت بزرگ روش پیشنهادی در این است که تمامی جواب‌های فازی مسئله را به‌طور هم‌زمان به دست می‌آورد. درنهایت، مثال‌های محاسباتی عملی متنوعی برای نشان دادن اثربخشی این روش ارائه شده است.

تاریخ دریافت:
۱٤۰۳/۱۰/۲

تاریخ پذیرش:
۱٤۰۳/۱۱/۱۷

کلیدواژه‌ها:
الگوریتم وو؛ مجموعه‌های مشخصه؛ اعداد فازی؛ سیستم معادلات چندجمله‌ای فازی؛ اعداد فازی مثلثی؛ راه‌حل‌ها

نویسنده‌مسئول:
farahani@cmu.ac.ir

doi: 10.22034/abmir.2025.22565.1085

E-ISSN: 2821-2037

۱- مقدمه

دستگاه‌های فازی رویکردی متفاوت نسبت به مفهوم سنتی عضویت در مجموعه‌ها ارائه می‌دهند که ریشه در فلسفه یونان باستان دارد. بااین‌حال، دستگاه‌های چندجمله‌ای فازی در طیف گسترده‌ای از مسائل در علوم، مهندسی و اقتصاد ظاهر شده‌اند [۲۰]. علاوه بر این، دستگاه‌های فازی در بسیاری از کاربردهای مالی اهمیت زیادی دارند [۱۸]. به همین دلیل، پرداختن به دستگاه‌های فازی چالشی برای پژوهشگران در حوزه‌های مختلف ایجاد کرده است. روش‌های متعددی برای حل دستگاه‌های فازی پیشنهاد شده است که حل معادلات خطی فازی اولین تلاش عمده در این زمینه بوده است [۸] . در مقالات [۱, ۲, ۱٤] نویسندگان از روش نیوتن و سایر روش‌های تکراری برای حل معادلات فازی استفاده کرده‌اند. علاوه بر این، روش‌هایی مبتنی بر برنامه‌ریزی غیرخطی [۱۸] و توابع پارامتری [۲۱, ۲۲] نیز معرفی شده‌اند. به‌طور معمول، این رویکردها نیاز به انتخاب نقطه اولیه مناسب دارند. یکی دیگر از محدودیت‌های این روش‌ها، دشواری در یافتن همه جواب‌های دستگاه به‌طور هم‌زمان و معیارهای تعیین وجود راه‌حل است. مقالات علمی ذکرشده به چالش‌های متعددی که در حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی پیش می‌آید پرداخته‌اند [٤] .بااین‌حال، مسائل دیگری وجود دارند که همچنان در این آثار بی‌پاسخ مانده‌اند.

۱- این روش‌ها نیازمند انتخاب یک نقطه اولیه هستند که اغلب دشوار است.
۲- جواب‌های تقریبی متعددی ممکن است به دست آید. البته اگر مسئله در یک ناحیه دارای جواب یکتا باشد این روش‌ها در صورت همگرایی به آن جواب همگرا خواهند شد.
۳- هیچ معیار یا روشی برای ارزیابی اینکه آیا دستگاه‌ها یک راه‌حل ارائه می‌دهند یا خیر وجود ندارد.
٤- این روش‌ها برای یک دستگاه خاص، اطلاعاتی درباره تعداد راه‌حل‌ها ارائه نمی‌دهند.
۵- هنگامی که دستگاهی هیچ راه‌حل معتبری ندارد، روش انتخابی ممکن است نتایج گمراه‌کننده‌ای ارائه دهد.
٦- تمامی جواب‌های دستگاه نمی‌توانند به‌طور هم‌زمان استخراج شوند.

ظهور دستگاه‌های فازی در زمینه‌های علمی متنوع و چالش‌های ذکرشده ما را بر آن داشت تا یک الگوریتم جدید برای حل این دستگاه‌ها معرفی کنیم. روش پیشنهادی ما مبتنی بر روش وو است، یک الگوریتم برجسته برای حل دستگاه‌های چندجمله‌ای که توسط ریاضی‌دان چینی وو ون‌تسون در دهه ۱۹۸۰ ابداع شد. این روش با ترکیب روش‌هایی از هندسه جبری و جبر محاسباتی به حل مسئله شناسایی راه‌حل‌های دستگاه معادلات چندجمله‌ای می‌پردازد. الگوریتم وو کاربردهای متعددی در حوزه‌های مختلف دارد، به‌ویژه در زمینه‌هایی که شامل معادلات چندجمله‌ای و هندسه جبری می‌شوند. برخی از کاربردهای برجسته آن عبارت‌اند از:

- **دستگاه‌های فازی:** روش وو برای حل دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی به کار گرفته می‌شود و در یافتن راه‌حل‌هایی که نمایانگر مجموعه‌های فازی و خواص آن‌ها هستند، کمک می‌کند.
- **رباتیک:** در کینماتیک ربات‌ها، این الگوریتم می‌تواند برای تعیین پیکربندی بازوهای رباتیک از طریق حل معادلات چندجمله‌ای که حرکات آن‌ها را توصیف می‌کنند، استفاده شود.
- **بینایی کامپیوتری:** این روش در وظایف استدلال هندسی مانند یافتن تقاطع‌ها و روابط بین منحنی‌ها و سطوح کمک می‌کند.
- **نظریه کنترل:** الگوریتم وو در طراحی سیستم‌های کنترل به کار می‌رود، جایی که معادلات چندجمله‌ای دینامیک و محدودیت‌های سیستم را توصیف می‌کنند.
- **رمزنگاری:** این الگوریتم می‌تواند در حل معادلات چندجمله‌ای مرتبط با پروتکل‌های رمزنگاری کمک کند و در تحلیل سیستم‌های امنیتی نقش داشته باشد.
- **زیست‌اطلاعاتی:** در مدل‌سازی سیستم‌های زیستی، این روش برای تحلیل مدل‌های چندجمله‌ای که تعاملات در مسیرهای بیوشیمیایی را توصیف می‌کنند، استفاده می‌شود.

- **اثبات خودکار قضایا:** این الگوریتم در تأیید صحت اثبات‌های ریاضی از طریق ساده‌سازی و حل معادلات چندجمله‌ای مرتبط کمک می‌کند.

این کاربردها انعطاف‌پذیری الگوریتم وو را در حل مسائل پیچیده در زمینه‌های نظری و عملی نشان می‌دهند.

در مقاله [۱۳] روشی برای حل سیستم‌های معادلات چندجمله‌ای فازی پیشنهاد شد که بر پایه روش مقادیر ویژه استوار است. در این روش، به جای استفاده از روش‌های پیچیده‌تر، از روشی استفاده می‌شود که محاسبه ریشه‌ها به‌صورت مستقل از یکدیگر انجام می‌شود. این ویژگی باعث می‌شود که خطاهای احتمالی در محاسبه یک ریشه، روی محاسبه ریشه‌های دیگر تأثیر نگذارد. نویسندگان با استفاده از ابزارهای جبر خطی، محاسبه ریشه‌های سیستم را به یافتن مقادیر ویژه یک ماتریس تبدیل می‌کنند. این کار به کاهش پیچیدگی محاسبات کمک می‌کند. مقاله همچنین دو نوع حل برای سیستم معادلات معرفی می‌کند: یک جواب کلی و یک نوع جواب دیگر به نام r- برش جواب که یک روش پارامتری برای نمایش راه‌حل‌هاست. در این روش از یک الگوریتم برای یافتن هر دو نوع حل استفاده می‌کند و شرطهای لازم و کافی برای وجود این راه‌حل‌ها را ارائه می‌دهد. این رویکرد از مزیت‌هایی مانند کاهش زمان محاسبه و استفاده مؤثر از ابزارهای جبر خطی بهره می‌برد، که در مقایسه با روش‌های سنتی، کارآمدتر و دقیق‌تر است.

ابزار اصلی روش وو مجموعه‌های مشخصه هستند. این مجموعه‌ها اولین‌بار توسط ریت [۱۹] معرفی شدند. از سال ۱۹۸۰، وو ون‌تسون پیشرفت‌های قابل‌توجهی در نظریه ریت و روش‌های مجموعه‌های مشخصه انجام داده است، به‌ویژه با حذف شرایط غیرقابلیت تجزیه و ایجاد الگوریتم‌های مؤثر برای تجزیه صفر سیستم‌های چندجمله‌ای عمومی [۲٤, ۲۵]. همچنین، روش وو رویکرد بسیار مؤثری در اثبات خودکار قضایای هندسی است [۱۲, ۲۳, ۲٤]. بسیاری از پژوهشگران روش ریت–وو را بهبود بخشیده و گسترش داده‌اند و این روش با موفقیت در چالش‌های علمی و مهندسی مختلف به‌کاررفته است [۲۷]. تلاش‌هایی برای تسریع محاسبات مجموعه‌های مشخصه انجام شده است [۱۱, ۱۱] که جدیدترین آن‌ها [۱۵] است. مجموعه‌های مشخصه ساختار مثلثی دارند که تعیین تنوع این مجموعه‌ها را از طریق جانشینی پیشرو ساده می‌کند. هدف ما برقراری ارتباط میان راه‌حل‌های دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی و تنوع یک مجموعه مشخصه است. برای این منظور، ما به دنبال تعیین راه‌حل‌های واقعی برای دستگاه‌های s معادله چندجمله‌ای با n متغیر هستیم:

$$\begin{cases} \tilde{h}_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{b}_1, \\ \vdots \\ \tilde{h}_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{b}_k, \\ \vdots \\ \tilde{h}_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \tilde{b}_s, \end{cases} \tag{1}$$

در اینجا، همه ضرایب و مقادیر سمت راست $\tilde{b}_1, \tilde{b}_2, \cdots, \tilde{b}_s$اعداد فازی هستند، درحالی‌که مجهولات $x_1, x_2, \cdots, x_n$ اعداد حقیقی می‌باشند. مفهوم اصلی روش پیشنهادی تبدیل دستگاه (۱) به یک سیستم قطعی و فرموله کردن یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای متشکل از 2s چندجمله‌ای است. سپس الگوریتم وو را به کار می‌بریم تا تنوع دستگاه قطعی را پیدا کنیم، که به ما اجازه می‌دهد تمامی راه‌حل‌های دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی را شناسایی کنیم.

نویسندگان مقاله [٦] از روش وو برای یافتن راه‌حل‌های دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی استفاده کرده‌اند. این روش تنها یک نوع جواب برای دستگاه‌های فازی معرفی می‌کند و معیاری برای بررسی وجود یا عدم وجود جواب ارائه نمی‌دهد. در مقابل، مقاله حاضر دو نوع راه‌حل به نام‌های "جواب" و "r-برش جواب" معرفی کرده و شرط لازم و کافی برای وجود و یکتایی هر دو نوع جواب را بیان می‌کند. همچنین، الگوریتمی جامع‌تر و کامل‌تر ارائه می‌شود که امکان یافتن تمام راه‌حل‌های دستگاه، شامل جواب‌ها و r-برش جواب‌ها را به‌طور همزمان فراهم می‌سازد.

ساختار مقاله به‌صورت زیر است. در بخش دوم تعریف‌های اساسی نظریه مجموعه‌های فازی و دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی مرور می‌شود. در بخش سوم الگوریتم وو معرفی می‌شود. سپس، در بخش چهارم الگوریتم اصلی برای حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی توضیح داده می‌شود. روش پیشنهادی با چندین مثال در بخش پنجم نشان داده می‌شود. بخش ششم شامل بحث‌هایی در این زمینه است و درنهایت در بخش هفتم نتیجه‌گیری کوتاهی ارائه خواهد شد.

۲– مقدمات فازی

این بخش شامل تعریف‌ها و نمادهای اساسی مرتبط با نظریه مجموعه‌های فازی است.

تعریف ۲–۱ یک عدد فازی به‌طور رسمی به‌عنوان یک مجموعه فازی $\tilde{A}$ در زمینه مجموعه اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ با ویژگی‌های زیر تعریف می‌شود:

۱– **تابع عضویت:**

تابع عضویت $\mu: \mathbb{R} \longrightarrow [0,1]$ وجود دارد، به‌طوری‌که:

- $\mu_{\tilde{A}}(x)$ میزان عضویت عنصر x در عدد فازی $\tilde{A}$ را نشان می‌دهد.
- تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}(x)$ پیوسته و برای همه x غیرمنفی است.

۲– **نرمال بودن:**

حداقل یک $c \in \mathbb{R}$ وجود دارد به‌طوری‌که $\mu_{\tilde{A}}(c) = 1$.

۳– **تحدب:**

برای هر نقطه $x, y \in \mathbb{R}$ و هر λ در بازه $[0,1]$، رابطه $\mu_{\tilde{A}}(\lambda x + (1-\lambda)y)) \geq min\{\mu_{\tilde{A}}(x), \mu_{\tilde{A}}(y)\}$ برقرار است.

٤– **حمایت محدود:**

مجموعه $\{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{A}}(x) \geq 0\}$ که حمایت عدد فازی را تشکیل می‌دهد، یک بازه محدود است. به‌عبارت دیگر، مقادیر حقیقی a و b وجود دارند به‌طوری‌که $a \geq x \geq b$ برای هر x در حمایت $\tilde{A}$.

در میان انواع مختلف اعداد فازی، اعداد فازی مثلثی بیشترین کاربرد را دارند. این اعداد به دلیل سادگی و سهولت در استفاده بسیار موردتوجه قرار گرفته‌اند. یک عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ به‌طورکلی با یک سه‌تای (m, α, β) تعریف می‌شود، که در آن m نمایانگر قله مثلث است و به عنوان محتمل‌ترین مقدار شناخته می‌شود. α نشان‌دهنده گسترش به سمت چپ مقدار m است که کران پایین $\tilde{A}$ را مشخص می‌کند. β نشان‌دهنده گسترش به سمت راست مقدار m است که کران بالا $\tilde{A}$ را تعیین می‌کند. این نمایش، محاسبات مربوط به اعداد فازی را ساده‌تر کرده و کاربردهای گسترده‌ای در مدل‌سازی و تصمیم‌گیری فراهم می‌کند. تابع عضویت $\mu_{\tilde{A}}$ برای یک عدد فازی مثلثی $\tilde{A}$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_{\tilde{A}}(x) = \begin{cases} 0 & x < m-\alpha \\ \dfrac{x-m}{\alpha}+1 & m-\alpha \leqslant x \leqslant m \\ \dfrac{m-x}{\beta}+1 & m \leqslant x \leqslant m+\beta \\ & x > m+\beta \end{cases}$$

تابع عضویت مذکور خطی است، که محاسباتی مانند جمع و تفریق اعداد فازی را ساده می‌کند. نمایش پارامتری عدد فازی $\tilde{A}$ به صورت زیر است:

$$\tilde{A} = [\underline{A}(r), \overline{A}(r)] = [m + \alpha(r-1), m + \beta(1-r)].$$

تعریف ۲–۲ در نمایش پارامتری، عدد فازی $\tilde{u}$ به‌صورت یک جفت مرتب از توابع $[\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$ برای $r \in [0,1]$ توصیف می‌شود که شرایط زیر را برآورده می‌کنند:

۱– **تک‌ریختی:**

- $\underline{u}(r)$ یک تابع غیرکاهشی است. به‌عبارت‌دیگر $\underline{u}(r_1) \leq \underline{u}(r_2)$ برای $r_1 < r_2 \in [0,1]$.
- $\overline{u}(r)$ یک تابع غیر افزایشی است. به‌عبارت‌دیگر $\overline{u}(r_1) \geq \overline{u}(r_2)$ برای $r_1 < r_2 \in [0,1]$.

۲– **کرانداری:**

- توابع باید این شرایط را داشته باشند $\underline{u}(0) \leq \overline{u}(0)$ و $\underline{u}(1) = \overline{u}(1)$.
- این اطمینان می‌دهد که عدد فازی به‌خوبی تعریف شده و دارای پشتیبانی محدودی است.

۳– **پیوستگی:**

- توابع $\overline{u}(r)$ و $\underline{u}(r)$ در بازه $[0,1]$ پیوسته هستند.

٤– **نمایش فازی:**

- مقادیر $\overline{u}(r)$ و $\underline{u}(r)$ برای هر $r \in [0,1)$ حدود پایین و بالای عدد فازی را نشان می‌دهند.

به‌طور خاص، $\tilde{u}_r = [\underline{u}(r), \overline{u}(r)]$ که درآن $\tilde{u}_r = \{x \in \mathbb{R}: \mu_{\tilde{u}}(x) \geqslant r\}$ نشان‌دهنده r–برش ام عدد فازی است. با استفاده از مفهوم r–برش‌ها، رابطه بین مجموعه‌های معمولی و مجموعه‌های فازی را می‌توان با قضیه زیر توصیف کرد.

قضیه ۲–۳ [۱۶] (اصل تجزیه) یک مجموعه فازی $\tilde{u}$ را می‌توان به صورت $\tilde{u} = \cup_{r\in[0,1]} r.\tilde{u}_r$ نمایش داد که در آن $r.\tilde{u}_r$ به معنای حاصل‌ضرب جبری یک اسکالر r با مجموعه r–برش برای $\tilde{u}_r$ است.

باید توجه داشت که بازه‌های مربوط به r–برش‌های یک عدد فازی، بسته و متراکم هستند. طبق اصل گسترش زاده [۱۷] و اصل تجزیه [۱۶] حساب بازه‌ای [۱٦] می‌تواند برای محاسبه حساب عدد فازی روی r–برش‌ها استفاده شود. برای اعداد فازی دلخواه $\tilde{u}, \tilde{v}$ و یک عدد حقیقی k، موارد زیر برقرار است:

- **برابری:** عدد فازی $\tilde{u}$ برابر با $\tilde{v}$ است، اگر و تنها اگر r–برش‌های آن‌ها برای تمام $r \in [0,1]$ برابر باشند. به‌عبارت‌دیگر، $\tilde{u} = \tilde{v}$ اگر $\tilde{u}_r = \tilde{v}_r$ برای هر r در باز $[0,1]$ باشد.
- **جمع** $\tilde{u} + \tilde{v}$: نیز یک عدد فازی است و r–برش‌های آن با جمع r–برش‌های $\tilde{u}$ و $\tilde{v}$ به دست می‌آید.
- **ضرب با یک عدد حقیقی:** $k\tilde{u}$ یک عدد فازی است که r–برش‌های آن با ضرب هر عنصر در r–برش‌های $\tilde{u}$ در k به دست می‌آید.
- **تفریق** $\tilde{u} - \tilde{v}$: یک عدد فازی است که r–برش‌های آن با تفریق r–برش‌های $\tilde{v}$ از r–برش‌های $\tilde{u}$ به دست می‌آید

این خواص، عملیات‌های اصلی‌ای را که می‌توان بر روی اعداد فازی با استفاده از r–برش‌های آن‌ها انجام داد، نشان می‌دهند و امکان استفاده از عملیات‌های حسابی کلاسیک (مانند جمع، تفریق، ضرب) را بر روی مقادیر فازی به‌صورت معین فراهم می‌کنند.

تعریف ۲–٤ یک بردار $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ به عنوان یک راه‌حل برای دستگاه (۱) در نظر گرفته می‌شود،اگر $g_l(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \tilde{b}_l$ برای تمام $1 \le l \le s$.

به بیان ساده، یک بردار x زمانی یک جواب معتبر است که برای هر معادله در دستگاه، مقدار تابع برابر با مقدار فازی مربوطه باشد.

۳– مروری بر الگوریتم وو

در این بخش، چارچوبی که ایجاد می‌کنیم، پایه‌ای محکم برای بحث درباره الگوریتم وو و مجموعه‌های مشخصه در حوزه حلقه‌های چندجمله‌ای فراهم می‌کند. در ادامه، شرایط ترتیب جزئی که پیش‌تر ذکر شد را بیان می‌کنیم. فرض کنید $\mathbb{K}$ یک میدان پایه با مشخصه صفر باشد. عبارت $\Xi = \mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ نشان‌دهنده حلقه چندجمله‌ای با n متغیر $x_1, \dots, x_n$ روی $\mathbb{K}$ است. فرض می‌شود که متغیرها $x_1, \dots, x_n$ به ترتیب صعودی مرتب شده‌اند، به‌طوری‌که $x_i < x_j$ برای هر $i < j$. اکنون، اگر x_m انتخاب شود، $p \in \Xi$ را می‌توان به صورت یک چندجمله‌ای تک‌متغیره نسبت به x_m به شکل زیر نوشت:

$$p = I_t x_m^t + I_{t-1} x_m^{t-1} + \cdots + I_0.$$

در معادله بالا، t درجه p نسبت به x_m است، که با $\deg_{x_m}(p)$ نشان داده می‌شود. به‌عبارت‌دیگر، t بالاترین توان یا نمای x_m است که در چندجمله‌ای p ظاهر می‌شود. همچنین، برای $0 \le i \le t$ داریم:

$$I_i \in \mathbb{K}[x_1, \dots, x_{m-1}, x_{m+1}, \dots, x_n].$$

ضریب اصلی p نسبت به x_m به صورت $lc(p, x_m) = I_t$ نشان داده می‌شود. بیشترین زیرنویس c از x که در p ظاهر می‌شود، کلاس p را تعریف می‌کند و با $class(p)$ نمایش داده می‌شود. برای یک مقدار ثابت، کلاس برابر با صفر در نظر گرفته می‌شود. متغیر اصلی و مقدار اولیه p به ترتیب با x_c و $lc(p, x_c)$ نشان داده می‌شوند و با $lv(p)$ و $ini(p)$ نمادگذاری می‌شوند. می‌گوییم یک چندجمله‌ای $q \in \Xi$ نسبت به p ساده‌شده است، اگر $deg_{x_c}(q) < deg_{x_c}(p)$ باشد، که در اینجا $c = class(p) \neq 0$ است. همچنین، چندجمله‌ای q نسبت به مجموعه $F \subset \Xi$ ساده‌شده است، اگر نسبت به هر عنصر $p \in F$ ساده‌شده باشد. ما یک ترتیب جزئی روی چندجمله‌ای‌ها به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

برای $p,q \in \Xi$ ، چندجمله‌ای q رتبه بالاتری نسبت به p دارد، که به صورت $p < q$ نشان داده می‌شود، اگر یکی از معیارها و شرایط زیر برقرار باشد:

- $class(p) < class(q)$.
- $class(p) = class(q)$ هر دو برابر با c هستند و $deg_{x_c}(p) < deg_{x_c}(q)$.

ما می‌گوییم که p و q معادل هستند، و این را به صورت $p \sim q$ می‌نویسیم، اگر $class(p) = class(q) = c$ و $deg_{x_c}(p) = deg_{x_c}(q)$، یا اگر هر دو چندجمله‌ای ثابت باشند. یک دنباله از چندجمله‌ای‌ها $F = \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ به نام مجموعه مثلثی نامیده می‌شود،

اگر $class(p_1) < class(p_2) < \dots < class(p_r)$ باشد یا اگر $r = 1$. اگر p_j نسبت به p_i برای $i < j$ کاهش‌یافته باشد، آنگاه مجموعه F به عنوان یک مجموعه صعودی شناخته می‌شود. ما به گسترش ترتیب جزئی بر روی چندجمله‌ای‌ها ادامه می‌دهیم تا یک ترتیب جزئی برای مجموعه‌های صعودی برقرار کنیم. فرض کنید $F = \{p_1, \dots, p_r\}$ و $G = \{q_1, \dots, q_k\}$ مجموعه‌های صعودی هستند. ما $F < G$ را تعریف می‌کنیم اگر یکی از شرایط زیر برقرار باشد:

۱- برای برخی $j \leqslant \min\{r,k\}$ ، داریم $p_i \sim q_i$ برای تمام $i < j$، در حالیکه $p_j < q_j$

۲- $r > k$ و $p_i \sim q_i$ برای هر $i \leqslant k$

وقتی مجموعه‌های صعودی قابل مقایسه نباشند، این را با $F \sim G$ نشان می‌دهیم. اگر $F < G$، آنگاه F به عنوان مجموعه‌ای با رتبه پایین‌تر از G در نظر گرفته می‌شود. مجموعه پایه F یک مجموعه صعودی با کمترین رتبه است که از چندجمله‌ای‌هایی که از F انتخاب شده‌اند تشکیل شده است. حالا، ما به بحث در مورد یک نوع جالب از قسمهٔ چندجمله‌ای‌های چند متغیره می‌پردازیم که به آن "قسمهٔ کاذب "گفته می‌شود.

گزاره ۳-۱ [۱۲] فرض کنید p و q چندجمله‌ای‌هایی در Ξ باشند و $class(p)$ برابر با c باشد. در این صورت می‌توان یک معادله به صورت زیر نوشت:

$$I_c^m q = sp + r$$

که در آن $s, r \in \Xi$، $I_c = ini(p)$، $m \geqslant 0$ و یا $r = 0$ است یا r نسبت به چندجمله‌ای p کاهش‌یافته است.

در این گزاره، چندجمله‌ای r به عنوان شبه‌باقی‌مانده q هنگام انجام تقسیم شبه بر p شناخته می‌شود که با $prem(q,p)$ نمایش داده می‌شود. برای مجموعه صعودی $F = \{p_1, \dots, p_r\}$ و $q \in \Xi$، تقسیم شبه متوالی باقی‌مانده زیر را به دست می‌دهد:

$$I_1^{w_1} I_2^{w_2} \cdots I_r^{w_r} g = \sum s_i p_i + R \qquad (۲)$$

که در آن $s_i \in \Xi$، $w_i \geqslant 0$، $I_i = ini(p_i)$ و R نسبت به F کاهش‌یافته است. هنگامی که هر w_i به کوچک‌ترین مقدار ممکن انتخاب شود R به صورت یکتا تعیین شده و با $prem(q,F)$ نمایش داده می‌شود. برای یک زیرمجموعه متناهی $G \subset \Xi$، تعریف می‌کنیم:

$$prem(G,F) = \{prem(q,F) : q \in G\}.$$

علاوه بر این، ایده‌آل در Ξ که توسط F تولید می‌شود، به صورت $\langle F \rangle$ بیان می‌شود.

تعریف ۳-۲ یک مجموعه مشخصه $B \subset \Xi$ برای یک مجموعه چندجمله‌ای $F \subset \Xi$ غیرتهی به عنوان یک مجموعه صعودی تعریف می‌شود، به‌طوری‌که $B \subset \langle F \rangle$ و $prem(F,B) = \{0\}$.

فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از Ξ باشد. مجموعه

$$V(F) = \Big\{(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^n : h(a_1, \dots, a_n) = 0, \text{ برای هر } h \in F\Big\}$$

تنوع تعیین‌شده توسط مجموعه چندجمله‌ای F است. فرض کنید $G \subset \Xi$ یک مجموعه چندجمله‌ای باشد، در این صورت تعریف می‌کنیم:

$$V(F/G) = V(F) \backslash V(G)$$

که به آن تنوع شبه‌جبری گفته می‌شود.

در قضیه زیر، ویژگی‌های کلیدی مجموعه‌های مشخصه بیان شده‌اند. این قضیه با نام اصل ترتیب‌گذاری وو شناخته می‌شود. در واقع، اصل ترتیب‌گذاری وو یک مفهوم اساسی در هندسه جبری و جبر محاسباتی است، به‌ویژه در زمینه حلقه‌های چندجمله‌ای. این اصل بیان می‌کند که برای هر مجموعه‌ای از چندجمله‌ای‌ها، یک ترتیب‌گذاری خوب روی این مجموعه وجود دارد که امکان تقسیم چندجمله‌ای‌ها را به‌صورت سیستماتیک فراهم می‌کند. این

اصل به‌طور خاص در کار با ایده‌آل‌های چندجمله‌ای کاربرد دارد و به اثبات وجود یک نمایش کاهش‌یافته برای چندجمله‌ای‌ها در زمینه تقسیم چندجمله‌ای کمک می‌کند.

قضیه ۳–۳ [۲٤] (اصل ترتیب‌گذاری وو) فرض کنید B یک مجموعه مشخص برای $F \subset \Xi$ باشد. در این صورت، $V(F)$ که مجموعه جواب‌های Fاست، به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$V(F) = V(B/I_B) \cup \bigcup_{b\in B} V(F \cup B \cup \{ini(b)\}).$$

در این عبارت:

- B/I_Bنشان‌دهنده خارج‌قسمت Bنسبتبه I_Bاست.
- $I_B = \prod_{b\in B} ini(b)$ که در آن $ini(b)$جمله اولیه هر عنصر bدر B است.
- $\bigcup_{b\in B} V(F \cup B \cup \{ini(b)\})$اجتماع تنوع‌هایی است که با افزودن جملات اولیه هر bدر B به مجموعه $F \cup B$ تولید می‌شوند.

این قضیه نقش کلیدی در هندسه جبری و جبر محاسباتی دارد و تجزیه تنوع‌ها را بر اساس مجموعه‌های مشخص و جملات اولیه آن‌ها نشان می‌دهد. این تجزیه، یک تقسیم‌بندی ساختارمند از مجموعه جواب $V(F)$بر اساس مجموعه‌های مشخصه و جملات اولیه ارائه می‌دهد که امکان تحلیل دقیق‌تر تنوع مرتبط با Fرا فراهم می‌کند.

این الگوریتم شامل مجموعه‌ای از گام‌های کاملاً تعریف‌شده است که با دنبال کردن آن‌ها به نتیجه مطلوب می‌رسیم. این گام‌ها به شرح زیر هستند:

۱– **ورود دستگاه چندجمله‌ای‌ها:** با یک دستگاه از چندجمله‌ای‌های چندمتغیره شروع کنید.

۲– **ساخت مجموعه مشخصه:** یک مجموعه مشخصه برای دستگاه شناسایی کنید که به‌عنوان یک نمایه کاهش‌یافته عمل می‌کند.

۳– **حذف متغیرها:** از دستکاری‌های جبری و محاسبات نتیجه‌گیری برای حذف متغیرها به‌طور مرحله‌به‌مرحله استفاده کنید.

٤– **حل سیستم کاهش‌یافته:** پس از کاهش دستگاه، دستگاه ساده‌تر می‌تواند به‌راحتی حل شود و اغلب به حل‌های صریح منجر می‌شود یا عدم وجود جواب‌ها را نشان می‌دهد.

با اتکا به اصل ترتیب‌گذاری وو، الگوریتم وو طراحی شده است تا تمام مجموعه‌های مشخصه موردنیاز برای محاسبه $V(F)$را شناسایی کند و یک رویکرد سیستماتیک برای به‌دست آوردن مجموعه جواب‌های Fفراهم می‌آورد.

الگوریتم ۳–٤ [۲۳](WuMethod)

ورودی :یک مجموعه غیرتهی $F \subset \Xi$

خروجی :یک مجموعه Zشامل مجموعه‌های مشخصه که در آن $V(F) = \bigcup_{B\in Z} V(B/I_B),$

که $I_B = \prod_{b\in B} ini(b)$ است.

گام‌های الگوریتم:

۱– **مقداردهی اولیه:**

$D := \{F\}$ و $Z := \emptyset$

۲– تا زمانی که $D \neq \emptyset$

۲–۱ یک عنصر F'را از Dانتخاب کنید.

۲–۲ مقدار D را به‌روزرسانی کنید:

$D := D\{F'\}$

۲–۳ یک مجموعه مشخصه Bبرای F' انتخاب کنید.

۲–٤ اگر $B \neq \{1\}$

۲–٤–۱ مقدار Zرا به‌روزرسانی کنید:

$Z := Z \cup \{B\}$

۲–٤–۲ مقدار Dرا به‌روزرسانی کنید:

$$D := D \bigcup \cup_{b\in B} \{F' \cup B \cup \{ini(b) | ini(b) \neq 1\}\}$$

۳– بازگشت Z

با استفاده از الگوریتم وو، می‌توان $V(F)$ را به صورت اجتماع تنوع‌های شبه‌جبری مجموعه‌های مشخصه بیان کرد. درنتیجه، تعیین $V(F)$با سهولت نسبی ممکن است، زیرا این مجموعه‌ها به‌سادگی قابل حل هستند.

مثال ۳-۵ برای اعمال الگوریتم وو به $F = \{x_1x_2 + x_1 + x_2, x_1x_2^2 + x_1 + x_2\}$ با ترتیب $x_2 < x_1$، مراحل زیر انجام می‌شود:

۱- مقدار اولیه $F' := F$ و $D = \emptyset$ تنظیم می‌شود.

۲- مجموعه $B = \{x_2^3 - x_2^2, x_1x_2 + x_1 + x_2\}$ به‌عنوان یک مجموعه مشخصه شناسایی می‌شود. بنابراین، $Z := \{B\}$.

۳- محاسبه جملات اولیه:

- $ini(x_1x_2 + x_1 + x_2) = x_2 + 1$
- $ini(x_2^2 - x_2^3) = 1$

با توجه به این مقادیر، تنظیم می‌شود:

$D := \{F' \cup \{x_2 + 1\}\}$.

٤- حال، مقدار $F' := \{x_1x_2 + x_1 + x_2, x_1x_2^2 + x_1 + x_2, x_2 + 1\}$.

٥- مجموعه $\{1\}$ به‌عنوان مجموعه مشخصه F' انتخاب می‌شود و $D = \emptyset$.

٦- خروجی نهایی $Z = \{\{x_2^3 - x_2^2, x_1x_2 + x_1 + x_2\}\}$ است.

بنابراین:

$$V(F) = V(\{x_2^3 - x_2^2, x_1x_2 + x_1 + x_2\})\backslash V(x_2 + 1) = \left\{\left(x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = 1\right), (x_1 = 0, x_2 = 0)\right\}.$$

این دو نقطه، مجموعه جواب‌های $V(F)$ را تشکیل می‌دهند.

٤- الگوریتم اصلی

در این بخش، یک الگوریتم برای حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی (۱) ارائه می‌دهیم. در ابتدا، ضرایب و سمت راست دستگاه (۱) را به صورت پارامتری نمایش می‌دهیم. با اعمال عملیات حسابی روی اعداد فازی و استفاده از مفهوم تساوی بین آنها، شکل دقیق دستگاه (۱) به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\begin{cases} \overline{h}_{1,r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{b}_{1,r}, \\ \underline{h}_{1,r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{b}_{1,r}, \\ \vdots \\ \overline{h}_{k,r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{b}_{k,r}, \\ \underline{h}_{k,r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{b}_{k,r}, \\ \vdots \\ \overline{h}_{s,r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \overline{b}_{s,r}, \\ \underline{h}_{s,r}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \underline{b}_{s,r}, \end{cases} \qquad (۳)$$

شامل $n + 1$ متغیر و $2s$ چندجمله‌ای است، که در آن r در بازه $[0,1]$ قرار دارد و متغیرها متعلق به میدان اعداد حقیقی هستند. اکنون، اگر چندجمله‌ای‌های (۳) را بر اساس r دسته‌بندی کنیم، یک دستگاه چندجمله‌ای شامل $2s$ معادله به صورت زیر به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} f_1(x_1, \dots, x_n)r + g_1(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_k(x_1, \dots, x_n)r + g_k(x_1, \dots, x_n) = 0, \\ \vdots \\ f_{2s}(x_1, \dots, x_n)r + g_{2s}(x_1, \dots, x_n) = 0, \end{cases} \qquad (٤)$$

که در آن f_i, g_i اعضای حلقه چندجمله‌ای $\mathbb{K}[x_1, \dots, x_n]$ هستند، برای همه $1 \leq i \leq 2s$ و $r \in [0,1]$. معیار وجود راه‌حل به دو بخش تقسیم می‌شود که بر اساس تعریف راه‌حل برای این سیستم تعیین می‌گردد، یعنی، جواب و r-برش جواب.

تعریف ٤-١ بردار $(x_1, x_2, \dots, x_n) = (a_1, a_2, \dots, a_n)$ یک جواب برای دستگاه (۱) نامیده می‌شود اگر شرایط زیر برقرار باشند:

$\overline{h}_{i,r}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \overline{b}_{i,r}$,

$\underline{h}_{i,r}(a_1, a_2, \dots, a_n) = \underline{b}_{i,r}$,

برای همه $1 \le i \le s$ و $0 \le r \le 1$.

تعریف ٤-٢

بردار $(x_1, x_2, \ldots, x_n, r) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, r_0)$ یک r- برش جواب برای دستگاه (۱) نامیده می‌شود اگر:

$$\overline{h}_{i,r_0}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \overline{b}_{i,r_0},$$

$$\underline{h}_{i,r_0}(a_1, a_2, \ldots, a_n) = \underline{b}_{i,r_0},$$

برای همه $1 \le i \le s$ و برای یک r_0 که $0 \le r_0 \le 1$ است.

ابتدا، برخی نمادها را معرفی می‌کنیم. در سیستم (٤)، فرض کنید $F_1 = \{f_1, \ldots, f_{2s}, g_1, \ldots, g_{2s}\}$ و $F_2 = \{g_i f_j - g_j f_i : 1 \le i \ne j \le 2s\}$. همچنین، فرض کنید Z_1 و Z_2 به ترتیب مجموعه‌های مشخصه برای ایده‌آل های تولیدشده برای مجموعه‌های F_1 و F_2 باشند. سپس، قرار می‌دهیم:

$$H_1 = (V(F_1) \cap \mathbb{R}^n).$$

اگر $J \subsetneq \{1, \ldots, 2s\}$ زیرمجموعه‌ای دلخواه باشد، قرار می‌دهیم:

$$T_J = (V(F_2) \cap V(f_j, g_j : j \in J) \setminus V(\Pi_{i \notin J}\ f_i)) \cap \mathbb{R}^n$$

و

$$H_2' = \bigcup_{J \subsetneq \{1, \ldots, 2s\}} T_J$$

و

$$H_2 = \{a \in H_2' : 0 \le -\frac{g_i(a)}{f_i(a)} \le 1 \text{ and } \ i \notin J\}.$$

با توجه به نمادهای بالا، معیار وجود جواب برای دستگاه (۱) ارائه می‌شود و مجموعه تمامی راه‌حل‌های دستگاه نیز در قضیه زیر مشخص می‌گردد.

قضیه ٤-٣ دستگاه (۱) راه‌حل‌های حقیقی دارد اگر و تنها اگر $Z_1 \ne \emptyset$ و $H_1 \ne \emptyset$. علاوه بر این، H_1 مجموعه تمامی راه‌حل‌های دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی (۱) است.

برهان فرض کنید F_1 مجموعه چندجمله‌ای‌ها در سیستم (٤) باشد. اگر Z_1 مجموعه‌ای غیرتهی باشد، در این صورت H_1 نیز مجموعه‌ای غیرتهی خواهد بود. بنابراین، هر عضو H_1 به‌عنوان یک جواب برای دستگاه معادلات (۱) شناخته می‌شود. طرف دیگر بدیهی است و اثبات قضیه کامل می‌شود.

اکنون، معیار وجود r- برش جواب در قضیه زیر ارائه شده و تمامی r- برش جواب‌های آن معرفی می‌شود.

قضیه ٤-٤ دستگاه (۱) r- برش جواب دارد اگر و تنها اگر $Z_2 \ne \emptyset$ و $H_2 \ne \emptyset$. علاوه بر این، H_2 مجموعه تمامی r- برش جواب‌های دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی (۱) است.

برهان فرض کنید $Z_2 \ne \emptyset$ و $H_2 \ne \emptyset$. ازآنجاکه $H_2 \ne \emptyset$، فرض کنید $(a_1, \ldots, a_n) \in H_2$. سپس، مجموعه‌ای $J \subsetneq \{1, \ldots, 2s\}$ وجود دارد به‌طوری‌که $(a_1, \ldots, a_n) \in T_J$. اکنون دو حالت زیر را در نظر می‌گیریم:

۱- اگر $J = \emptyset$، آنگاه $r_0 = -\frac{g_1(a_1,\ldots,a_n)}{f_1(a_1,\ldots,a_n)}$ و داریم $(a_1, \ldots, a_n) \in V(f_1 g_i - f_i g_1)$ بنابراین، $\frac{g_1(a_1,\ldots,a_n)}{f_1(a_1,\ldots,a_n)} = \frac{g_i(a_1,\ldots,a_n)}{f_i(a_1,\ldots,a_n)}$ که این نتیجه می‌دهد $f_i(a_1, \ldots, a_n) r_0 + g_i(a_1, \ldots, a_n) = 0$. از این‌رو، $(a_1, \ldots, a_n, r_0)$ یک r- برش جواب برای دستگاه (۱) است.

۲- اگر $J \ne \emptyset$ آنگاه مقدار $r_0 = -\frac{g_j(a_1,\ldots,a_n)}{f_j(a_1,\ldots,a_n)}$ را برای مقداری از $j \notin J$ انتخاب می‌کنیم. برای هر $k \notin J$، داریم $(a_1, \ldots, a_n) \in V(f_k g_j - f_j g_k)$ و بنابراین $\frac{g_k(a_1,\ldots,a_n)}{f_k(a_1,\ldots,a_n)} = \frac{g_j(a_1,\ldots,a_n)}{f_j(a_1,\ldots,a_n)}$ که این نتیجه می‌دهد $f_k(a_1, \ldots, a_n) r_0 + g_k(a_1, \ldots, a_n) = 0$. از طرف دیگر، $(a_1, \ldots, a_n) \in V(f_j, g_j : j \in J)$ به این معناست که $f_m(a_1, \ldots, a_n) r_0 + g_m(a_1, \ldots, a_n) = 0$ برای هر $m \in J$. بنابراین، $(a_1, \ldots, a_n, r_0)$ یک r- برش جواب برای سیستم (۱) است.

عکس این مطلب بدیهی است. اثبات بخش دوم از فرایند اثبات بخش اول به‌وضوح نتیجه می‌شود.

پس‌ازآن، از الگوریتم وو برای یافتن تنوع مجموعه چندجمله‌ای‌ها از معادله (۳) در $\mathbb{R}[r, x_1, x_2, \cdots, x_n]$ استفاده می‌کنیم. برای مقادیر r در بازه $[0,1]$ هر عنصر از این تنوع یک جواب برای دستگاه فازی را تشکیل می‌دهد. بر اساس این تحلیل، روش یافتن جواب‌ها و r -برش جواب‌ها برای دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی در الگوریتم زیر بیان می‌شود.

الگوریتم ٤-٥ (الگوریتم اصلی)

ورودی: F، یک دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی

خروجی: تمام جواب‌های و تمام r- برش جواب‌ها برای F

ابتدا: $S_1 := \emptyset$ و $S_2 := \emptyset$

۱- فرم پارامتری F_1 را محاسبه کنید.

۲- مجموعه مشخصه Z_1را برای ایده‌آل تولیدشده توسط F_1 را محاسبه کنید.

۳- اگر $Z_1 \neq \emptyset$آنگاه

الف. $H_1 := WuMethod(Z_1)$.

ب. $S_1 := H_1$.

٤- مجموعه مشخصه Z_2 را برای ایده‌آل تولیدشده توسط F_2 را محاسبه کنید.

٥- اگر $Z_2 \neq \emptyset$ آنگاه

الف. $H'_1 := EigMethod(Z_2)$.

ب برای $J \subsetneqq \{1,\dots,2s\}$ قرار می‌دهیم $T_J = H'_1 \cap V(f_j, g_j : j \in J) \backslash V(\Pi_{i \notin J}\ f_i)$.

ج. $H'_2 := \cup_{J \subsetneqq \{1,\dots,2s\}} T_J$.

د. $H_2 = \{a \in H'_2 : 0 \leq -\frac{g_i(a)}{f_i(a)} \leq 1, \quad i \notin J\}$.

ه. اگر $H_2 \neq \emptyset$ آنگاه $S_2 := \cup_{j \notin J} \{(\alpha, -\frac{g_j(a_1,\dots,a_n)}{f_j(a_1,\dots,a_n)}) : \alpha \in H_2\}$.

٥- مثال‌های محاسباتی

در این بخش، چندین مطالعه موردی محاسباتی برای نمایش عملکرد الگوریتم ما ارائه می‌شود. ما از بسته نرم‌افزاری Maple به نام Epsilon برای محاسبه مجموعه‌های مشخصه استفاده کرده‌ایم.

برای تمام مثال‌ها، از نمادهای زیر استفاده شده است:

مجموعه چندجمله‌ای $F = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ شکل دقیق دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی است. در مثال‌های ٥،١، ٥،٢ و ٥،٣، متغیرها به ترتیب $x < y < r$ مرتب شده‌اند. جواب الگوریتم وو برای Fبه صورت $Z = [z_1, z_2, \cdots, z_m]$بیان می‌شود. اجتماع $V(z_i \backslash I_{z_i})$برای $i = 1,2,\cdots,m$ به عنوان Vشناخته می‌شود. درنهایت، $V(F)$تنوع Fرا با توجه به علامت متغیرها و مقدار $r \in [0,1]$ نشان می‌دهد.

مثال ٥-١ [٣] بیایید توجه خود را به دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی زیر معطوف کنیم:

$$\begin{cases}(2,1,1)xy + (3,1,1)x^2y^2 + (2,1,1)x^3y^3 = (7,3,3)\\(5,1,1)xy + (2,3,1)x^2y^2 + (2,2,1)x^3y^3 = (9,6,3).\end{cases}$$

حالت ١- اگر $x \geqslant 0$ و $y \geqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases}f_1 = (1+r)xy + (2+r)x^2y^2 + (1+r)x^3y^3 - 3\,r - 4\\f_2 = (3-r)xy + (4-r)x^2y^2 + (3-r)x^3y^3 + 3\,r - 10\\f_3 = (4+r)xy + (3\,r-1)x^2y^2 + 2\,rx^3y^3 - 6\,r - 3\\f_4 = (6-r)xy + (3-r)x^2y^2 + (3-r)x^3y^3 + 3\,r - 12\end{cases}$$

و

$$Z = [z_1 = \{xy - 1\}],$$

$$V = V(z_1/\{x\}) = \{(x = \frac{1}{y}, y, r) : 0 \neq y, r \in \mathbb{R}\},$$

$$V(F) = \{(x = \frac{1}{y}, y, r) : y \in \mathbb{R}^+, r \in [0,1]\}.$$

حالت ٢- اگر $x \geqslant 0$ و $y \leqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases}f_1 = (3-r)xy + (2+r)x^2y^2 + (3-r)x^3y^3 - 3\,r - 4\\f_2 = (1+r)xy + (4-r)x^2y^2 + (1+r)x^3y^3 + 3\,r - 10\\f_3 = (6-r)xy + (3\,r-1)x^2y^2 + (3-r)x^3y^3 - 6\,r - 3\\f_4 = (4+r)xy + (3-r)x^2y^2 + 2\,rx^3y^3 + 3\,r - 12\end{cases}$$

و

$$Z = [z_1 = \{xy - 1, r - 1\}],$$

$$V = V(z_1/\{x\}) = \{(x = \frac{1}{y}, y, r = 1) : 0 \neq y \in \mathbb{R}\},$$

$$V(F) = \emptyset.$$

درنتیجه، در این وضعیت هیچ‌گونه جوابی برای دستگاه فازی وجود ندارد.

حالت ٣- اگر $x \leqslant 0$ و $y \geqslant 0,$ آنگاه:

سیستم دقیق مشابه دستگاهی است که در حالت قبلی داشتیم. با در نظر گرفتن علامت متغیرها، در این مورد دستگاه هیچ‌گونه جوابی ندارد.

حالت ٤- اگر $x \leqslant 0$ و $y \leqslant 0,$ آنگاه:

دستگاه دقیق مشابه دستگاهی است که در حالت $x \geqslant 0$ و $y \geqslant 0$ داشتیم. بنابراین،

$$V(F) = \{(x = \frac{1}{y}, y, r) : y \in \mathbb{R}^-, r \in [0,1]\}.$$

مثال ۵–۲ [۳] دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}(2,1,1)x^2+(3,2,2)y^2=(5,3,3)\\(2,3,1)x+(2,1,2)y=(0,5,2).\end{cases}$$

حالت ۱- اگر $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases}f_1=(1+r)x^2+(1+2r)y^2-(2+3r)=0\\f_2=(3-r)x^2+(5-2r)y^2-(8-3r)=0\\f_3=(3r-1)x+(1+r)y-(5r-5)=0\\f_4=(3-r)x+(4-2r)y-(2-2r)=0\end{cases}$$

و

$$Z=[z_1=\{x^2-1,(x-1)y-x+1,(x-1)r-x+1\},z_2=\{x-1,y^2-1,(y-2)r+y+4\}],$$

$$V=V(z_1/\{(x-1)^2\})\cup V(z_2/\{y-2\})=\{(x=-1,y=1,r=1),(x=1,y=1,r=5),(x=1,y=-1,r=1)\},$$

$$V(F)=\emptyset.$$

بنابراین، در این مورد دستگاه فازی هیچ‌گونه جوابی ندارد.

حالت ۲- اگر $x\geqslant 0$ و $y\leqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases}f_1=(1+r)x^2+(1+2r)y^2-(2+3r)=0\\f_2=(3-r)x^2+(5-2r)y^2-(8-3r)=0\\f_3=(3r-1)x+(4-2r)y-(5r-5)=0\\f_4=(3-r)x+(1+r)y-(2-2r)=0\end{cases}$$

و

$$Z=[z_1=\{x^3-x^2-x+1,(x-1)((17\,x-83)y-83\,x+17),(x-1)^2(r-1)\},z_2=\{x-1,y+1\},z_3=\{x^2-2\,x+1,(x-1)y+x-1\}],$$

$$V=V(z_1/\{(x-1)^3(17\,x-83)\})\cup V(z_2)\cup V(z_3/\{x-1\}=\{(x=-1,y=1,r=1)\}\cup\{(x=1,y=-1,r):r\in\mathbb{R}\}\cup\emptyset=\{(x=-1,y=1,r=1),(x=1,y=-1,r):r\in\mathbb{R}\}.$$

$$V(F)=\{(x=1,y=-1,r):r\in[0,1]\}$$

حالت ۳- اگر $x\leqslant 0$ و $y\geqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases}f_1=(1+r)x^2+(1+2r)y^2-(2+3r)=0\\f_2=(3-r)x^2+(5-2r)y^2-(8-3r)=0\\f_3=(3-r)x+(1+r)y-(5r-5)=0\\f_4=(3r-1)x+(4-2r)y-(2-2r)=0\end{cases}$$

و

$$Z=[z_1=\{(2\,x+5)(x-1)(x+1)^2,(130\,x^2+221\,x-71)y+40\,x^3-4\,x^2+19\,x+225,(2\,x+5)((85x^2+221\,x-26)r-175\,x^2-221\,x+116)\}],$$

$$V=V(z_1/\{(130x^2+221x-71)(2\,x+5)(85\,x^2+221\,x-26)\}=\{(x=1,y=-1,r=1),(x=-1,y=1,r=1)\}.$$

$$V(F)=\{(x=-1,y=1,r=1)\}.$$

حالت ٤- اگر $x\leqslant 0$ و $y\leqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases}f_1=(1+r)x^2+(1+2r)y^2-(2+3r)=0\\f_2=(3-r)x^2+(5-2r)y^2-(8-3r)=0\\f_3=(3-r)x+(4-2r)y-(5r-5)=0\\f_4=(3r-1)x+(1+r)y-(2-2r)=0\end{cases}$$

و

$$Z=[z_1=\{x^2-1,(x+1)y+x+1,(x+1)r-x-1\},z_2=\{x+1,y^2-1,(y-1)r+y-1\},z_3=\{x+1,y-1,r-1\}],$$

$$V=V(z_1/\{(x+1)^2\}\cup V(z_2/\{y-1\})\cup V(z_3)=\{(x=1,y=-1,r=1),(x=-1,y=-1,r=-1),(x=-1,y=1,r=1)\},$$

$$V(F)=\emptyset.$$

بنابراین، دستگاه فازی در این حالت هیچ‌گونه جوابی ندارد.

مثال ۵–۳ [۳] دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}(0.25,0.75,0.625)=(0,0.5,0.5)x^5+(0.5,0.5,0.25)y\\(1.25,1.25,0.75)=(0.5,1,0.5)x^4+(1.5,0.5,0.5)xy.\end{cases}$$

حالت ۱- اگر $x\geqslant 0$ و $y\geqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases} f_1 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \frac{1}{2}\,yr + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\,r = 0 \\ f_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\,r\right)y - \frac{7}{8} + \frac{5}{8}\,r = 0 \\ f_3 = \left(-\frac{1}{2}+r\right)x^4 + \left(1+\frac{1}{2}\,r\right)xy - \frac{5}{4}\,r = 0 \\ f_4 = \left(1-\frac{1}{2}\,r\right)x^4 + \left(2-\frac{1}{2}\,r\right)xy - 2 + \frac{3}{4}\,r = 0 \end{cases}$$

و

$$Z = [z_1 = \{(2x^3 + 2\,x^2 + 2\,x + 5)(x-1)^2, (6\,x^2 + 9\,x + 4)(x-1)^2(-1+2\,y), (3x^2 + 11\,x + 19)(x-1)^2(r-1)\}, z_2 = \{(x-1)^2, (2\,y-1)(x-1)\}, z_3 = \{x-1, 2\,y-1\}],$$

$$V = V(z_1/\{(x-1)^4(6\,x^2+9\,x+4)(3\,x^2+11\,x+19)\}) \cup V(z_2/\{x-1\}) \cup V(z_3) = \{(x=1, y=\frac{1}{2}, r) : r \in \mathbb{R}\},$$

$$V(F) = \{(x=1, y=\frac{1}{2}, r) : r \in [0,1]\}.$$

حالت ۲- اگر $x \geqslant 0$ و $y \leqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases} f_1 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\,r\right)y + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\,r = 0 \\ f_2 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \frac{1}{2}\,yr - \frac{7}{8} + \frac{5}{8}\,r = 0 \\ f_3 = \left(-\frac{1}{2}+r\right)x^4 + \left(2-\frac{1}{2}\,r\right)xy - \frac{5}{4}\,r = 0 \\ f_4 = \left(1-\frac{1}{2}\,r\right)x^4 + \left(1+\frac{1}{2}\,r\right)xy - 2 + \frac{3}{4}\,r = 0 \end{cases}$$

و

$$Z = [z_1 = \{(2x^3 + 2\,x^2 + 2\,x + 5)(x-1), (234\,x^3 - 700\,x^2 + 399\,x + 85)(2\,y-1), (234x^3 - 700x^2 + 399\,x + 85)(r-1)\}],$$

$$V = V(z_1/\{(234\,x^3 - 700\,x^2 + 399\,x + 85)^2\}) = \{(x=1, y=\frac{1}{2}, r=1), (x=-1.473157368, y=\frac{1}{2}, r=1)\},$$

$$V(F) = \emptyset.$$

درنتیجه، در این مورد دستگاه فازی هیچ‌گونه جوابی ندارد.

حالت ۳- اگر $x \leqslant 0$ و $y \geqslant 0$، آنگاه:

$$\begin{cases} f_1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \frac{1}{2}\,yr + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\,r = 0 \\ f_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\,r\right)y - \frac{7}{8} + \frac{5}{8}\,r = 0 \\ f_3 = \left(-\frac{1}{2}+r\right)x^4 + \left(2-\frac{1}{2}\,r\right)xy - \frac{5}{4}\,r = 0 \\ f_4 = \left(1-\frac{1}{2}\,r\right)x^4 + \left(1+\frac{1}{2}\,r\right)xy - 2 + \frac{3}{4}\,r = 0 \end{cases}$$

و

$$Z = [z_1 = \{2x^4 + 3x - 5, (21\,x^3 - 35\,x^2 - 35\,x + 15)(2\,y-1), (117x^3 - 350x^2 - 70\,x + 235)(r-1)\}],$$

$$V = V(z_1/\{(21\,x^3 - 35\,x^2 - 35\,x + 15)(117x^3 - 350x^2 - 70x + 235)\}) = \{(x=1, y=\frac{1}{2}, r=1), (x=-1.473157368, y=\frac{1}{2}, r=1)\},$$

$$\begin{cases} f_1 = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \left(\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\,r\right)y + \frac{1}{2} - \frac{3}{4}\,r = 0 \\ f_2 = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\,r\right)x^5 + \frac{1}{2}\,yr - \frac{7}{8} + \frac{5}{8}\,r = 0 \\ f_3 = \left(-\frac{1}{2}+r\right)x^4 + \left(1+\frac{1}{2}\,r\right)xy - \frac{5}{4}\,r = 0 \\ f_4 = \left(1-\frac{1}{2}\,r\right)x^4 + \left(2-\frac{1}{2}\,r\right)xy - 2 + \frac{3}{4}\,r = 0 \end{cases}$$

حالت ٤- اگر $x \leqslant 0$ و $y \leqslant 0$، آنگاه:

و

$$Z = [z_1 = \{2x^5 + 2\,x^4 + 3\,x^2 - 2\,x - 5, (328x^4 - 1132x^3 - 458x^2 + 1020\,x)y - 158\,x^4 + 566\,x^3 + 229\,x^2 - 501\,x - 15, (11x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3\,x - 3)r - 11\,x^4 + 3\,x^3 + 8\,x^2 - 3\,x + 3\}, z_2 = \{x^2 - 1, (38\,x - 16)y + 8\,x - 19, (47\,x + 74)r - 101\,x - 20\}],$$

$$V = V(z_1/\{(328x^4 - 1132x^3 - 458x^2 + 1020x)(11x^4 - 3x^3 - 8x^2 + 3x - 3)\}) \cup V(z_2/\{(38x-16)(47x+74)\}) = \{(x=-1.473157368, y=\frac{1}{2}, r=1), (x=1, y=\frac{1}{2}, r=1), (x=-1, y=-\frac{1}{2}, r=-3)\},$$

$$V(F) = \emptyset.$$

ازاین‌رو، در این حالت هیچ جوابی برای دستگاه فازی وجود ندارد.

مثال ٥-٤ دستگاه معادلات چندجمله‌ای فازی زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{cases}(1,2,3)x^2 + (0,1,1)y^2 = (1,2,2)\\(2,4,3)x^2 + z^2 = (0,2,3).\end{cases}$$

سپس، داریم:

$$\begin{cases}f_1 = (2\,r - 1)x^2 + (r - 1)y^2 - 2\,r + 1 = 0\\f_2 = (4 - 3\,r)x^2 + (1 - r)y^2 + 2\,r - 3 = 0\\f_3 = (4\,r - 2)x^2 + z^2 - 2\,r + 2 = 0\\f_4 = (5 - 3\,r)x^2 + z^2 + 3\,r - 3 = 0.\end{cases}$$

متغیرها به ترتیب $r < x < y < z$ مرتب شده‌اند و

$$Z = [z_1 = \{5r^2 - 6\,r + 1, x^2(r-3) + 2{,}14\,y^2(r - 1) - 3\,r + 3{,}5\,z^2(r-3) - 12\,r - 8\},$$
$$z_2 = \{r - 1, x^2 - 1, z^2 + 2\}],$$

$$V = V(z_1/\{(r-1)(r-3)^2\}) \cup V(z_2) = \emptyset,$$

$$V(F) = \emptyset.$$

بنابراین، دستگاه فازی هیچ‌گونه جوابی ندارد.

٦- تفسیر و نتایج

روش وو یکی از روش‌های معروف برای حل دستگاه معادلات چندجمله‌ای غیرخطی است که از تئوری حذف و مثلث‌بندی استفاده می‌کند. این روش مبتنی بر تجزیه‌وتحلیل رابطه‌های چندجمله‌ای و استفاده از مجموعه‌های معادلات مثلثی شده است.

در ادامه، مزایا و معایب این روش شرح داده می‌شود:

ازجمله مزایای روش وو می‌توان موارد زیر را برشمرد:

١- **دقت بالا:** روش وو از تکنیک‌های دقیق جبر چندجمله‌ای برای یافتن جواب‌ها استفاده می‌کند و تضمین می‌کند که تمام جواب‌های دستگاه پیدا شوند.

٢- **قابلیت مثلثی‌سازی:** این روش با تبدیل سیستم به مجموعه‌ای از معادلات ساده‌تر که به صورت مثلثی سازمان‌دهی شده‌اند، فرایند حل را تسهیل می‌کند.

٣- **کاربرد در سیستم‌های نمادین:** مناسب برای حل دستگاه‌هایی که شامل متغیرهای نمادین هستند و نه فقط مقادیر عددی.

٤- **پایدار در برابر خطاهای عددی:** در مقایسه با روش‌های عددی، چون بیشتر عملیات‌ها به صورت نمادین انجام می‌شوند، این روش خطاهای محاسباتی کمتری دارد.

٥- **امکان استفاده برای سیستم‌های چندجمله‌ای پیچیده:** این روش به ویژه برای سیستم‌های چندجمله‌ای پیچیده و با تعداد بالای معادلات کاربرد دارد.

همچنین از معایب روش وو می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

١- **پیچیدگی محاسباتی بالا:** به‌خصوص برای سیستم‌های بزرگ با تعداد زیادی متغیر، محاسبات زمان‌بر و نیازمند منابع محاسباتی بالا می‌شود.

٢- **حساسیت به ترتیب معادلات و متغیرها:** نتایج و کارایی این روش ممکن است به ترتیب‌بندی متغیرها و معادلات بستگی داشته باشد.

٣- **نیاز به نرم‌افزارهای تخصصی:** اجرای این روش معمولاً به ابزارهای جبر کامپیوتری پیشرفته نیاز دارد که برای کاربران عمومی ممکن است به راحتی در دسترس نباشد.

٤- **عدم بهینه‌سازی برای داده‌های عددی خاص:** اگرچه برای معادلات نمادین مناسب است، اما روش‌های عددی مانند نیوتن یا سایر تکنیک‌های تکراری برای داده‌های عددی ممکن است سریع‌تر عمل کنند.

در حالت کلی، روش وو یک روش قوی برای حل دستگاه‌های چندجمله‌ای نمادین است که مزیت اصلی آن در دقت بالا و پوشش تمام جواب‌هاست. بااین‌حال، برای دستگاه‌های بزرگ یا مواردی که سرعت محاسبه اولویت دارد، ممکن است روش‌های دیگر مناسب‌تر باشند.

الگوریتم‌های عددی متداول که برای دستگاه‌های معادلات خطی و غیرخطی توسعه داده شده‌اند، برای دستگاه‌های چندجمله‌ای نیز قابل‌استفاده هستند. بااین‌حال، نقاط ضعف این روش‌ها شامل موارد زیر است:

١- برای اعمال این روش‌ها باید در نظر داشت که جواب‌ها می‌توانند مثبت یا منفی باشند. این روش‌ها تا زمانی که این مسئله حل نشود، کارآمد نخواهند بود.

٢- انتخاب یک نقطه اولیه مناسب برای این روش‌ها دشوار است.

۳- این روش‌ها تنها بخشی از جواب‌های تقریبی را ارائه می‌دهند، درصورتی‌که در یک ناحیه دارای جواب یکتا نباشد.

٤- این روش‌ها فاقد معیارهای دقیق یا قوانین قطعی برای تأیید وجود جواب هستند.

٥- این روش‌ها اطلاعاتی در مورد تعداد جواب‌ها ارائه نمی‌دهند، که این امر باعث پیچیدگی و بار محاسباتی زیاد می‌شود.

٦- زمانی که دستگاه‌ها حل‌ناپذیر هستند، این روش‌ها ممکن است نتایج گمراه‌کننده‌ای ارائه دهند.

استفاده از روش پیشنهادی امکان تعیین تمام جواب‌های دقیق دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی را بدون تکیه بر روش‌های تقریبی، انتخاب نقطه اولیه یا اعمال محدودیت‌های مقداری فراهم می‌کند. بنابراین، می‌توانیم دستگاه را به‌طور کارآمد حل کرده و تمام جواب‌ها را به‌طور هم‌زمان پیدا کنیم. این روش پیشنهادی، به‌طور مداوم تمام جواب‌های ممکن دستگاه‌ها را در صورت وجود، پیدا می‌کند. علاوه بر این، شرطی لازم و کافی برای وجود و یکتایی جواب‌های دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی ارائه شده است. این روش محدودیت‌های پیش‌تر ذکرشده را حذف می‌کند.

۷- نتیجه‌گیری

این پژوهش الگوریتمی مشتق‌شده از روش وو برای شناسایی تمامی جواب‌های دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی ارائه کرده است. این روش امکان حل سیستم‌های مثلثی را فراهم می‌کند که مدیریت آن‌ها ساده‌تر است. این رویکرد بدون استفاده از روش‌های تقریبی و بدون تحمیل محدودیت‌های مقداری، به ما امکان می‌دهد تمام جواب‌های موجود را به‌طور سیستماتیک پیدا کنیم. علاوه بر این، شرطی لازم و کافی برای وجود و یکتایی جواب‌ها و r-برش جواب ارائه شد که به تحلیل دستگاه‌ها کمک شایانی می‌کند. به‌طورکلی، این روش گامی مؤثر در جهت حل دقیق و جامع دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی به شمار می‌آید. نتایج عددی کارایی الگوریتم را در حل دستگاه‌های معادلات چندجمله‌ای فازی و دستیابی به تمامی جواب‌های ممکن تأیید می‌کند.

دسترسی به داده‌ها

در این پژوهش، نویسنده اعلام می‌کنند که هیچ‌گونه تضاد منافعی در ارتباط با انتشار این مقاله وجود ندارد.

References

[1] Abbasbandy, S., Asady, B., Newton’s method for solving fuzzy nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation 159, 2 (2004), 349–356.

[2] Abbasbandy, S., Jafarian, A., Steepest descent method for solving fuzzy nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation 174, 1 (2006), 669–675.

[3] Abbasbandy, S., Otadi, M., Mosleh, M., Numerical solution of a system of fuzzy polynomials by fuzzy neural network. Inf. Sci. 178, 8 (2008), 1948–1960.

[4] Abbasi Molai, A., Basiri, A., Rahmany, S., Resolution of a system of fuzzy polynomial equations using the grobner basis. Inf. Sci. 220 (Jan. 2013), 541–558.

[5] Allahviranloo, T., Mikaeilvand, N., Kiani, N. A., Shabestari, R. M., Signed decomposition of linear systems. An International journal of Applications and Applied Mathematics, 3 (2008), 77–88.

[6] Boroujeni, M., Basiri, A., Rahmany, S., Valibouse, A., Finding solutions of fuzzy polynomial

[7] equations systems by an Algebraic method. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 30 (2016), 791–800.

[8] Buckley, J., Qu, Y., Solving linear and quadratic fuzzy equations. Fuzzy Sets and Systems, 35 (1990), 43–59.

[9] Buckley, J. J., Qu, Y., Solving fuzzy equations: a new solution concept. Fuzzy Sets and Systems, 39 (1991), 291–301.

[10] Buckley, J. J., Qu, Y., Solving systems of linear fuzzy equations. Fuzzy Sets and Systems, 43 (1991), 33–43.

[11] Chou, S., Mechanical Geometry Theorem Proving. Mathematics and Its Applications. Springer, 1987.

[12] Chou, S., Gao, X., Ritt wu’s decomposition algorithm and geometry theorem proving. Tech. rep., Austin, TX, USA, 1990.

[13] Cox, D., Little, J., O’Shea, D., Ideal, Varieties, and Algorithms: An introduction to computational algebra geometry and commutative algebra, third edition. Springer-Varlag, New York, 2007.

[14] Farahani, H., Rahmany, S., Basiri, A., Abbasi Molai, A., Resolution of a system of fuzzy polynomial equations using eigenvalue method. Soft Computing, 19, (2015), 283–291.

[15] Kajani, M. T., Asady, B., Hadi-Vencheh, A., An iterative method for solving dual fuzzy nonlinear equations. Applied Mathematics and Computation, 167, 1 (2005), 316–323.

[16] Jin, M., Li, X., Wang, D., A new algorithmic scheme for computing characteristic sets. Journal of Symbolic Computation, 50, (2013), 431–449.

[17] Klir, G. J., and Yuan, B., Fuzzy Ssts and Fuzzy Logic, Theory and Applications. Prentice Hall P T R, 1995.

[18] Zadeh, L., The concept of a linguistic variable and its application to approximate reasoning. Information Sciences, 8, (1975), 199–249.

[19] Muzzioli, S., Reynaerts, H., The solution of fuzzy linear systems by non-linear programming: a financial application. European Journal of Operational Research, 177 (2007), 1218–1231.

[20] Ritt, J.F., Differential Algebra, American Mathematical Society, New York, 1950.

[21] Tacu, A., Aluja, J. G., Teodorescu, H., Fuzzy systems in economy and engineering. Hourse of The Romanian Acad., 1994.

[22] Vroman, A., Deschrijver, G., Kerre, E. E., Solving systems of linear fuzzy equations by parametric functions. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 15 (2007), 370–384.

[23] Vroman, A., Deschrijver, G., Kerre, E. E., Solving systems of linear fuzzy equations by parametric functions- an improved algorithm. Fuzzy Sets and Systems, 158 (2007), 1515–1534.

[24] Wu, W.-T., On the Decision Problem and the Mechanical Theorem Proving and the Mechanization of Theorem in Elementary Geometry. Scientia Sinica, 21 (1978), 159–172.

[25] Wu, W.-T., Basic Principles of Mechanical Theorem Proving in Geometrics Journal of Systems Science and Mathematical Sciences, (1984).

[26] Wu, W.-T., Mathematics Mechanization: Mechanical Geometry Theorem-Proving, Mechanical Geometry Problem-Solving and Polynomial Equations-Solving. Mathematics and Its Applications. Springer, 2001.

[27] Wu, W.-T., Gao, X.-S., Automated reasoning and equation solving with the characteristic set method. Journal of Computer Science and Technology, 21 (5) (2006), 756–764.

[28] Wu, W.-T., Gao, X.-S Mathematics mechanization and applications after thirty years. Frontiers of Computer Science in China, 1 (1) (2007), 1–8.

Journal of Applied And Basic Machine Intelligence Research (ABMIR)

Applied and Basic Machine Intelligence Research

Vol. 2, No. 1, Spring & Summer 2024, pp. 155 - 170

Solving Fuzzy Polynomial Equation Systems Using Wu's Method

Hamed Farahani*

Department of Mathematics, Chabahar Maritime University, Chabahar, Iran

Article Information

Original Research Paper

Received:
2024 December 22

Accepted:
2025 February 5

Keywords:
Wu's algorithm; characteristic sets; fuzzy numbers; fuzzy polynomial equation systems; triangular fuzzy numbers; solutions.

Corresponding Author*:
farahani@cmu.ac.ir

Abstract

In this paper, a method based on Wu's algorithm is introduced for determining the real solutions of fuzzy polynomial equation systems. First, the r-cuts of a fuzzy polynomial equation system are computed, and a parametric representation of the system is derived. Then, Wu's algorithm is applied to transform the parametric representation of the fuzzy polynomial equation system into a finite set of characteristic sets. There is a strong correlation between the solutions of these characteristic sets and the solutions of the polynomial system. Wu's algorithm effectively transforms polynomial systems into triangular systems by generating characteristic sets, which simplifies and enhances the efficiency of solving them. This method not only clarifies the relationships between variables but also improves computational efficiency in solving polynomial equations. A significant advantage of the proposed approach is that it simultaneously obtains all fuzzy solutions to the problem. Finally, various practical computational examples are provided to demonstrate the effectiveness of this method.

: 10.22034/abmir.2025.22565.1085